

Региональная Архангельская общественная организация
“Научно-техническое общество судостроителей имени А.Н. Крылова”
Северодвинское отделение Ломоносовского фонда

М.Я. Лауфер

Избранные задачи математической физики

Сборник статей

Научные редакторы – руководители правления регионального отделения
НТО судостроителей имени академика А.Н. Крылова
профессор Ф.Н. Шушарин и доцент В.М. Попов

Автор выражает искреннюю благодарность
профессору, доктору технических наук А.Я. Альпину,
профессору, доктору технических наук Ю.Я. Иосселю,
профессору, доктору физико-математических наук А.М. Протасову,
профессору, доктору физико-математических наук В.И. Матвееву
за ценные рекомендации при рецензировании отдельных статей
настоящего сборника, а также В.Н. Леонтьеву, В.Ф. Усынину,
В.А. Потехину за подготовку сборника к печати и выход его в свет.

Филиал “Севмашвтуз” Государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования “Санкт-Петербургский
государственный морской технический университет”
в городе Северодвинске

УДК 530+51
ББК 22.311
Л 38

Лауфер М.Я. Избранные задачи математической физики. Сборник статей. Северодвинск: НТО судостроителей имени академика А.Н. Крылова; Севмашвуз; Северодвинское отделение Ломоносовского фонда, 2005. - 142 с.

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, проф. В.И. Матвеев
(Поморский государств. университет им. М.В. Ломоносова, Архангельск);
доктор технич. наук, проф. А.Я. Альпин (ФГУП “ПО “Севмаш”);
канд. технич. наук, проф. В.Т. Соколов (Севмашвуз).

Сборник включает статьи, часть из которых опубликована ранее в отдельных и в настоящее время труднодоступных научных изданиях. Статьи характеризует новизна применяемых математических методов в решении фундаментальных проблем физики, теории колебаний и теории прочности.

Например, в некоторых статьях представлен новый, по сравнению с методом Фурье, способ разделения переменных при решении линейных дифференциальных уравнений в частных производных, что позволило сделать своеобразный вывод о природе покраснения световых волн при движении во Вселенной.

В одной из статей представлена картина распространения поперечной волны в ином, чем принято в настоящее время, более приближенном к реальности, процессе. Представлено также более полное решение уравнений теории упругости и один из подходов к решению уравнения Риккати.

Лицензия на издательскую деятельность ИД № 01734 от 2000 года

ISBN 5-7723-0605-9

© 2005, Лауфер М.Я.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ПРИ ИНТЕГРИРОВАНИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Предлагается обобщение метода Фурье разделения переменных для решения линейных дифференциальных уравнений в частных производных от n независимых переменных.

Решение находится в виде суммы произвольного числа произведений n неизвестных функций, каждая из которых зависит от одной переменной. При этом, в отличие от метода Фурье, на слагаемые не налагается условие, чтобы они по отдельности удовлетворяли рассматриваемому уравнению.

С помощью предлагаемого метода может быть построено бесчисленное множество полных систем ортогональных функций (в частности система, получаемая обычным методом Фурье), с применением которых могут решаться краевые задачи. Можно полагать, что в ряде случаев применение указанных систем окажется более целесообразным по сравнению с решениями по методу Фурье.

В работе приведены решения, полученные указанным методом для гармонического уравнения, теплопроводности и волнового уравнения.

Как известно, для решения задач математической физики во многих случаях применим метод разделения переменных Фурье.

Он заключается в том, что решение линейного дифференциального уравнения в частных производных (или в дальнейшем для краткости просто уравнения) от n независимых переменных находится как произведения n неизвестных функций или суммы некоторого числа этих произведений. В последнем случае на слагаемые налагается условие, чтобы каждое из них удовлетворяло рассматриваемому уравнению. Функции, входящие в указанные произведения, зависят, соответственно, только от одной из переменных.

Например, решение гармонического уравнения в случае трёх независимых переменных x_1, x_2 и x_3

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} = 0$$

находится как

$$\Phi_i = \Phi_{1,i}(x_1)\Phi_{2,i}(x_2)\Phi_{3,i}(x_3)$$

или

$$\Phi = \sum_{i=1}^m \Phi_{1,i}(x_1)\Phi_{2,i}(x_2)\Phi_{3,i}(x_3),$$

где $\Phi_{1,i}(x_1)$, $\Phi_{2,i}(x_2)$ и $\Phi_{3,i}(x_3)$ - функции, зависящие, соответственно, лишь от одной переменной x_1 , x_2 или x_3 и каждое из слагаемых под знаком $\sum$ должно являться решением рассматриваемого уравнения.

Не останавливаясь на подробном рассмотрении метода Фурье, особенности которого достаточно известны, отметим следующее:

Существует возможность обобщения этого метода. Это обобщение заключается в том, что на решение уравнения от n независимых переменных, которое находится в виде произвольного числа слагаемых, являющихся, в свою очередь, произведением n неизвестных функций, зависящих только от одной переменной, не налагается условие, чтобы эти слагаемые по отдельности являлись решениями рассматриваемого уравнения.

Если такое условие наложить, то полученное решение ничем не будет отличаться от решения по методу Фурье.

Решение предлагаемого вида даёт возможность разделить переменные в уравнении. Найденные при этом интегралы уравнения отличаются от интегралов, полученных методом Фурье, и содержат последние в качестве некоторого частного случая.

Как примеры приводятся решения указанным методом некоторых известных уравнений.

1. Рассмотрим сначала наиболее простой случай – интегрирование гармонического уравнения в двухмерном пространстве с координатами x_1 и x_2

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} = 0, \quad (1.1)$$

когда его решение находится в виде суммы двух слагаемых, т.е.

$$\Phi = X_{1,1}(x_1)X_{1,2}(x_2) + X_{2,1}(x_1)X_{2,2}(x_2). \quad (1.2)$$

На слагаемые (1.2) не налагается условие, чтобы каждое из них удовлетворяло уравнению (1.1).

$X_{1,1}(x_1)$, $X_{1,2}(x_2)$, $X_{2,1}(x_1)$ и $X_{2,2}(x_2)$ – функции, зависящие соответственно от одной переменной x_1 или x_2 .

Первая цифра, стоящая в индексах X , обозначает порядковый номер функции. Вторая цифра указывает переменную, от которой зависит эта функция.

Подставим (1.2) в (1.1), после простых преобразований, имеем

$$\left(\frac{X''_{1,1}}{X_{1,1}} + \frac{X''_{1,2}}{X_{1,2}} \right) \frac{X''_{1,1}}{X_{2,1}} + \left(\frac{X''_{2,1}}{X_{2,1}} + \frac{X''_{2,2}}{X_{2,2}} \right) \frac{X''_{2,2}}{X_{1,2}} = 0.$$

$$\text{Полагаем } \left. \begin{aligned} \frac{X''_{1,2}}{X_{1,2}} &= -n_1^2 \\ \frac{X''_{2,1}}{X_{2,1}} &= -n_2^2 \end{aligned} \right\}, \quad (1.3)$$

где n_1 и n_2 – произвольные постоянные, после чего получаем

$$\left(\frac{X''_{1,1}}{X_{1,1}} - n_1^2 \right) \frac{X_{1,1}}{X_{2,1}} = - \left(\frac{X''_{2,2}}{X_{2,2}} + n_2^2 \right) \frac{X_{2,2}}{X_{1,2}}.$$

Левая часть последнего равенства зависит только от x_1 и не зависит от x_2 , а правая наоборот. Следовательно, каждая из них не зависит ни от x_1 , ни x_2 т.е. они постоянны. Обозначим эту постоянную через m . Тогда

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{X''_{1,1}}{X_{1,1}} - n_1^2 \right) \frac{X_{1,1}}{X_{2,1}} &= m \\ \left(\frac{X''_{2,2}}{X_{2,2}} + n_2^2 \right) \frac{X_{2,2}}{X_{1,2}} &= -m \end{aligned} \right\}. \quad (1.4)$$

Таким образом, переменные разделились.

После подстановки результатов интегрирования (1.3) и (1.4) в (1.2), получаем решение уравнения (1.1) в виде

$$\begin{aligned} \Phi = & \left(\frac{m}{2n} C_1^* x_1 e^{nx_1} - \frac{m}{2n} C_2^* x_1 e^{-nx_1} + C_3^* e^{nx_1} + C_4^* e^{-nx_1} \right) (C_1 \cos nx_2 + C_2 \sin nx_2) + \\ & + \left(\frac{m}{2n} C_2 x_2 \cos nx_2 - \frac{m}{2n} C_1 x_2 \sin nx_2 + C_3 \cos nx_2 + C_4 \sin nx_2 \right) (C_1^* e^{nx_1} + C_2^* e^{-nx_1}), \end{aligned} \quad (1.5)$$

Где $C_1^* \div C_4^*$ и $C_1 \div C_4$ - постоянные интегрирования.

При интегрировании (1.3) и (1.4) для упрощения записи решения (1.5) было принято $|n_1| = |n_2| = n$.

Указанное условие для постоянных n_j , $j=1 \div 5$, в подобных же случаях будет соблюдаться и в дальнейшем.

Кроме этого, любую совокупность постоянных, являющуюся множителем каждой функции-слагаемого, входящей в решение, будем обозначать как a_i , где индекс $i=1, 2, 3, \dots$ определяет порядковый номер функции-слагаемого. Например, с учётом принятых обозначений для постоянных, (1.5) запишется как

$$\begin{aligned} \Phi = & (a_1 x_1 e^{nx_1} + a_2 x_1 e^{-nx_1} + a_3 e^{nx_1} + a_4 e^{-nx_1}) (a_5 \cos nx_2 + a_6 \sin nx_2) + \\ & + (a_7 x_2 \cos nx_2 + a_8 x_2 \sin nx_2 + a_9 \cos nx_2 + a_{10} \sin nx_2) (a_{11} e^{nx_1} + a_{12} e^{-nx_1}) \end{aligned}$$

Легко видеть, что решение (1.5) отличается от решения уравнения (1.1), найденного методом Фурье (см. (1.12)). Последнее содержится в решении (1.5) как его некоторая частная составляющая.

Рассмотрим далее случай, когда решение уравнения (1.1) находится по предлагаемому методу в виде суммы, например пяти слагаемых, т.е.

$$\Phi = X_{1,1} X_{1,2} + X_{2,1} X_{2,2} + X_{3,1} X_{3,2} + X_{4,1} X_{4,2} + X_{5,1} X_{5,2}. \quad (1.6)$$

Подставляя (1.6) в (1.1), после преобразований получаем

$$\begin{aligned} & \left(\frac{X''_{1,1}}{X_{1,1}} + \frac{X''_{1,2}}{X_{1,2}} \right) \frac{X_{1,1}}{X_{5,1}} + \left(\frac{X''_{2,1}}{X_{2,1}} + \frac{X''_{2,2}}{X_{2,2}} \right) \frac{X_{2,1} X_{2,2}}{X_{5,1} X_{1,2}} + \left(\frac{X''_{3,1}}{X_{3,1}} + \frac{X''_{3,2}}{X_{3,2}} \right) \frac{X_{3,1} X_{3,2}}{X_{5,1} X_{1,2}} + \\ & + \left(\frac{X''_{4,1}}{X_{4,1}} + \frac{X''_{4,2}}{X_{4,2}} \right) \frac{X_{4,1} X_{4,2}}{X_{5,1} X_{1,2}} + \left(\frac{X''_{5,1}}{X_{5,1}} + \frac{X''_{5,2}}{X_{5,2}} \right) \frac{X_{5,2}}{X_{1,2}} = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Полагаем} \left. \begin{aligned} \frac{X''_{1,2}}{X_{1,2}} &= -n_1^2 \\ \frac{X''_{5,1}}{X_{5,1}} &= n_5^2 \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

Прибавим и отнимем во втором, третьем и четвёртом выражениях, стоящих в скобках, соответственно n_2^2 , n_3^2 и n_4^2 . Тогда, с учётом (1.7), имеем

$$\left(\frac{X''_{1,1}}{X_{1,1}} - n_1^2\right) \frac{X_{1,1}}{X_{5,1}} + \left(\frac{X''_{2,1}}{X_{2,1}} - n_2^2 + \frac{X''_{2,2}}{X_{2,2}} + n_2^2\right) \frac{X_{2,1}X_{2,2}}{X_{5,1}X_{1,2}} + \left(\frac{X''_{3,1}}{X_{3,1}} - n_3^2 + \frac{X''_{3,2}}{X_{3,2}} + n_3^2\right) \frac{X_{3,1}X_{3,2}}{X_{5,1}X_{1,2}} +$$

$$+ \left(\frac{X''_{4,1}}{X_{4,1}} - n_4^2 + \frac{X''_{4,2}}{X_{4,2}} + n_4^2\right) \frac{X_{4,1}X_{4,2}}{X_{5,1}X_{1,2}} + \left(\frac{X''_{5,2}}{X_{5,2}} + n_5^2\right) \frac{X_{5,2}}{X_{1,2}} = 0.$$

Полагая
$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{X''_{2,1}}{X_{2,1}} - n_2^2\right) \frac{X_{2,1}}{X_{5,1}} &= m_1 \\ \left(\frac{X''_{4,2}}{X_{4,2}} + n_4^2\right) \frac{X_{4,2}}{X_{1,2}} &= -m_2 \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

m_j - произвольная постоянная ($j = 1 \div 10$), приходим к выражению

$$\left(\frac{X''_{1,1}}{X_{1,1}} - n_1^2\right) \frac{X_{1,1}}{X_{5,1}} + m_1 \frac{X_{2,2}}{X_{1,2}} + \left(\frac{X''_{2,2}}{X_{2,2}} + n_2^2\right) \frac{X_{2,1}X_{2,2}}{X_{5,1}X_{1,2}} + \left(\frac{X''_{3,1}}{X_{3,1}} - n_3^2 + \frac{X''_{3,2}}{X_{3,2}} + n_3^2\right) \frac{X_{3,1}X_{3,2}}{X_{5,1}X_{1,2}} -$$

$$- m_2 \frac{X_{4,1}}{X_{5,1}} + \left(\frac{X''_{4,1}}{X_{4,1}} - n_4^2\right) \frac{X_{4,1}X_{4,2}}{X_{5,1}X_{1,2}} + \left(\frac{X''_{5,2}}{X_{5,2}} + n_5^2\right) \frac{X_{5,2}}{X_{1,2}} = 0.$$

Прибавим и отнимем в левой части последнего равенства

$$m_3 \frac{X_{2,1}X_{3,2}}{X_{5,1}X_{1,2}} \text{ и } m_4 \frac{X_{3,1}X_{4,2}}{X_{5,1}X_{1,2}}$$

И примем

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{X''_{3,1}}{X_{3,1}} - n_3^2\right) \frac{X_{3,1}}{X_{5,1}} + m_3 \frac{X_{2,1}}{X_{5,1}} &= -m_5 \\ \left(\frac{X''_{3,2}}{X_{3,2}} + n_3^2\right) \frac{X_{3,2}}{X_{1,2}} - m_4 \frac{X_{4,2}}{X_{1,2}} &= m_6 \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

С учётом (1.9) получаем

$$\left(\frac{X''_{1,1}}{X_{1,1}} - n_1^2\right) \frac{X_{1,1}}{X_{5,1}} + m_1 \frac{X_{2,2}}{X_{1,2}} + \left(\frac{X''_{2,2}}{X_{2,2}} + n_2^2\right) \frac{X_{2,1}X_{2,2}}{X_{5,1}X_{1,2}} - m_5 \frac{X_{3,2}}{X_{1,2}} - m_3 \frac{X_{2,1}X_{3,2}}{X_{5,1}X_{1,2}} +$$

$$+ m_6 \frac{X_{3,1}}{X_{5,1}} + m_4 \frac{X_{3,1}X_{4,2}}{X_{5,1}X_{1,2}} - m_2 \frac{X_{4,1}}{X_{5,1}} + \left(\frac{X''_{4,1}}{X_{4,1}} - n_4^2\right) \frac{X_{4,1}X_{4,2}}{X_{5,1}X_{1,2}} + \left(\frac{X''_{5,2}}{X_{5,2}} + n_5^2\right) \frac{X_{5,2}}{X_{1,2}} = 0.$$

Прибавим и отнимем в левой части этого равенства

$$m_7 \frac{X_{2,1}X_{4,2}}{X_{5,1}X_{1,2}}$$

и положим

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{X''_{2,2}}{X_{2,2}} + n_2^2\right) \frac{X_{2,2}}{X_{1,2}} - m_3 \frac{X_{3,2}}{X_{1,2}} + m_7 \frac{X_{4,2}}{X_{1,2}} &= -m_8 \\ \left(\frac{X''_{4,1}}{X_{4,1}} - n_4^2\right) \frac{X_{4,1}}{X_{5,1}} + m_4 \frac{X_{3,1}}{X_{5,1}} - m_7 \frac{X_{2,1}}{X_{5,1}} &= m_9 \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

После чего имеем

$$\left(\frac{X''_{1,1}}{X_{1,1}} - n_1^2 \right) \frac{X_{1,1}}{X_{5,1}} - m_8 \frac{X_{2,1}}{X_{5,1}} + m_6 \frac{X_{3,1}}{X_{5,1}} - m_2 \frac{X_{4,1}}{X_{5,1}} = - \left(\frac{X''_{5,2}}{X_{5,2}} + n_5^2 \right) \frac{X_{5,2}}{X_{1,2}} - m_9 \frac{X_{4,2}}{X_{1,2}} + m_5 \frac{X_{3,2}}{X_{1,2}} - m_1 \frac{X_{2,2}}{X_{1,2}}.$$

Левая часть этого равенства не зависит от x_2 , а правая – от x_1 , следовательно

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{X''_{1,1}}{X_{1,1}} - n_1^2 \right) \frac{X_{1,1}}{X_{5,1}} - m_8 \frac{X_{2,1}}{X_{5,1}} + m_6 \frac{X_{3,1}}{X_{5,1}} - m_2 \frac{X_{4,1}}{X_{5,1}} &= m_{10} \\ \left(\frac{X''_{5,2}}{X_{5,2}} + n_5^2 \right) \frac{X_{5,2}}{X_{1,2}} + m_9 \frac{X_{4,2}}{X_{1,2}} - m_5 \frac{X_{3,2}}{X_{1,2}} + m_1 \frac{X_{2,2}}{X_{1,2}} &= -m_{10} \end{aligned} \right\}. \quad (1.11)$$

Таким образом, переменные разделены.

Подстановка результатов интегрирования (1.7) ÷ (1.11) в (1.6) даёт

$$\begin{aligned} \Phi = & (a_1 x_1^4 e^{nx_1} + a_2 x_1^4 e^{-nx_1} + a_3 x_1^3 e^{nx_1} + a_4 x_1^3 e^{-nx_1} + a_5 x_1^2 e^{nx_1} + a_6 x_1^2 e^{-nx_1} + a_7 x_1 e^{nx_1} + a_8 x_1 e^{-nx_1} + \\ & + a_9 e^{nx_1} + a_{10} e^{-nx_1}) (a_{11} \text{Cos} nx_2 + a_{12} \text{Sin} nx_2) + (a_{13} x_1 e^{nx_1} + a_{14} x_1 e^{-nx_1} + a_{15} e^{nx_1} + a_{16} e^{-nx_1}) * \\ & * (a_{17} x_2^3 \text{Cos} nx_2 + a_{18} x_2^3 \text{Sin} nx_2 + a_{19} x_2^2 \text{Cos} nx_2 + a_{20} x_2^2 \text{Sin} nx_2 + a_{21} x_2 \text{Cos} nx_2 + a_{22} x_2 \text{Sin} nx_2 + \\ & + a_{23} \text{Cos} nx_2 + a_{24} \text{Sin} nx_2) + (a_{25} x_1^2 e^{nx_1} + a_{26} x_1^2 e^{-nx_1} + a_{27} x_1 e^{nx_1} + a_{28} x_1 e^{-nx_1} + a_{29} e^{nx_1} + a_{30} e^{-nx_1}) * \\ & * (a_{31} x_2^2 \text{Cos} nx_2 + a_{32} x_2^2 \text{Sin} nx_2 + a_{33} x_2 \text{Cos} nx_2 + a_{34} x_2 \text{Sin} nx_2 + a_{35} \text{Cos} nx_2 + a_{36} \text{Sin} nx_2) + \\ & + (a_{37} x_1^3 e^{nx_1} + a_{38} x_1^3 e^{-nx_1} + a_{39} x_1^2 e^{nx_1} + a_{40} x_1^2 e^{-nx_1} + a_{41} x_1 e^{nx_1} + a_{42} x_1 e^{-nx_1} + a_{43} e^{nx_1} + a_{44} e^{-nx_1}) * \\ & * (a_{45} x_2 \text{Cos} nx_2 + a_{46} x_2 \text{Sin} nx_2 + a_{47} \text{Cos} nx_2 + a_{48} \text{Sin} nx_2) (a_{49} e^{nx_1} + a_{50} e^{-nx_1}) (a_{51} x_2^4 \text{Cos} nx_2 + \\ & + a_{52} x_2^4 \text{Sin} nx_2 + a_{53} x_2^3 \text{Cos} nx_2 + a_{54} x_2^3 \text{Sin} nx_2 + a_{55} x_2^2 \text{Cos} nx_2 + a_{56} x_2^2 \text{Sin} nx_2 + a_{57} x_2 \text{Cos} nx_2 + \\ & + a_{58} x_2 \text{Sin} nx_2 + a_{59} \text{Cos} nx_2 + a_{60} \text{Sin} nx_2). \end{aligned}$$

В случае, если решение уравнения (1.1) находится в виде M слагаемых, то в символической форме оно может быть представлено как:

$$\Phi = X_1^{M-1} X_2^0 + X_1^{M-2} X_2 + \dots + X_1^k X_2^{M-1-k} + \dots + X_1 X_2^{M-2} + X_1^0 X_2^{M-1} = (X_1 + X_2)^{M-1},$$

где

$$\begin{aligned} X_1^K &= a_N x_1^k e^{nx_1} + a_{N+1} x_1^k e^{-nx_1} + a_{N+2} x_1^{k-1} e^{nx_1} + a_{N+3} x_1^{k-1} e^{-nx_1} + \dots + a_{N+2k} e^{nx_1} + a_{N+2k+1} e^{-nx_1}, \\ X_2^{M-1-k} &= a_{N+2k+2} x_2^{M-1-k} \text{Cos} nx_2 + a_{N+2k+3} x_2^{M-1-k} \text{Sin} nx_2 + a_{N+2k+4} x_2^{M-2-k} \text{Cos} nx_2 + \\ & + a_{N+2k+5} x_2^{M-2-k} \text{Sin} nx_2 + \dots + a_{N+2M-2} \text{Cos} nx_2 + a_{N+2M-1} \text{Sin} nx_2, \end{aligned}$$

N - порядковый номер.

Для сравнения ниже приводится решение уравнения (1.1), найденное по методу Фурье для случая M слагаемых.

$$\Phi = \sum_{i=1}^M (a_{1,i} e^{n_i x_1} + a_{2,i} e^{-n_i x_1}) (a_{3,i} \text{Cos} n_i x_2 + a_{4,i} \text{Sin} n_i x_2),$$

когда $n_1 \neq n_2 \neq \dots \neq n_M$.

При $n_1 = n_2 = \dots = n_M$

$$\Phi = (a_1 e^{nx_1} + a_2 e^{-nx_1}) (a_3 \text{Cos} nx_2 + a_4 \text{Sin} nx_2). \quad (1.12)$$

Рассмотрим более сложный случай – интегрирование гармонического уравнения в трёхмерном пространстве с координатами x_1 , x_2 и x_3 .

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} = 0 \quad (1.13)$$

Будем искать решение этого уравнения сначала в виде двух слагаемых $\Phi = X_{1,1}(x_1)X_{1,2}(x_2)X_{1,3}(x_3) + X_{2,1}(x_1)X_{2,2}(x_2)X_{2,3}(x_3)$, (1.14)

где $X_{1,1}(x_1), X_{2,1}(x_1)$; $X_{1,2}(x_2), X_{2,2}(x_2)$ и $X_{1,3}(x_3), X_{2,3}(x_3)$ - функции, зависящие соответственно от одной переменной x_1, x_2 или x_3 . Подставляя (1.14) в (1.13), после простых преобразований имеем

$$\left(\frac{X''_{1,1}}{X_{1,1}} + \frac{X''_{1,2}}{X_{1,2}} + \frac{X''_{1,3}}{X_{1,3}} \right) \frac{X_{1,1}}{X_{2,1}} + \left(\frac{X''_{2,1}}{X_{2,1}} + \frac{X''_{2,2}}{X_{2,2}} + \frac{X''_{2,3}}{X_{2,3}} \right) \frac{X_{2,2}X_{2,3}}{X_{1,2}X_{1,3}} = 0. \quad (1.15)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{X''_{2,1}}{X_{2,1}} &= n_1^2 \\ \frac{X''_{1,2}}{X_{1,2}} + \frac{X''_{1,3}}{X_{1,3}} &= -n_2^2 \end{aligned} \right\}. \quad (1.16)$$

Полагаем

Из второго уравнения (1.16) находим

$$\frac{X''_{1,2}}{X_{1,2}} = -n_2^2 - \frac{X''_{1,3}}{X_{1,3}} \quad \text{или} \quad \frac{X''_{1,2}}{X_{1,2}} = -m_1^2 \quad \text{и} \quad \frac{X''_{1,3}}{X_{1,3}} = m_1^2 - n_2^2.$$

Пусть для определённости $m_1^2 > n_2^2$. С учётом (1.16) имеем

$$\left(\frac{X''_{1,1}}{X_{1,1}} - n_2^2 \right) \frac{X_{1,1}}{X_{2,1}} + \left(n_1^2 + \frac{X''_{2,2}}{X_{2,2}} + \frac{X''_{2,3}}{X_{2,3}} \right) \frac{X_{2,2}X_{2,3}}{X_{1,2}X_{1,3}} = 0.$$

Полагаем далее $X_{2,3} = X_{1,3}$, т.е. $\frac{X''_{2,3}}{X_{2,3}} = m_1^2 - n_2^2$ (можно положить также, что

$X_{2,2} = X_{1,2}$). Тогда

$$\left(\frac{X''_{1,1}}{X_{1,1}} - n_2^2 \right) \frac{X_{1,1}}{X_{2,1}} = - \left(\frac{X''_{2,2}}{X_{2,2}} + n_1^2 + m_1^2 - n_2^2 \right) \frac{X_{2,2}}{X_{1,2}}$$

Откуда следует, что

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{X''_{1,1}}{X_{1,1}} - n_2^2 \right) \frac{X_{1,1}}{X_{2,1}} &= m_2 \\ \left(\frac{X''_{2,2}}{X_{2,2}} + n_1^2 + m_1^2 - n_2^2 \right) \frac{X_{2,2}}{X_{1,2}} &= -m_2 \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

Переменные разделены.

Подстановка результатов интегрирования (1.16) и (1.17) в (1.14) с учётом ранее принятого условия $n_1 = n_2 = n$ даёт

$$\Phi_1 = \left(a_1 e^{\sqrt{m_1^2 - n^2} x_3} + a_2 e^{-\sqrt{m_1^2 - n^2} x_3} \right) \left[(a_3 x_1 e^{nx_1} + a_4 x_1 e^{-nx_1} + a_5 e^{nx_1} + a_6 e^{-nx_1}) (a_7 \cos m_1 x_2 + a_8 \sin m_1 x_2) + (a_9 e^{nx_1} + a_{10} e^{-nx_1}) (a_{11} x_2 \cos m_1 x_2 + a_{12} x_2 \sin m_1 x_2 + a_{13} \cos m_1 x_2 + a_{14} \sin m_1 x_2) \right].$$

Уравнение (1.15) можно преобразовать к виду

$$\left(\frac{X''_{1,1}}{X_{1,1}} + \frac{X''_{1,2}}{X_{1,2}} + \frac{X''_{1,3}}{X_{1,3}} \right) \frac{X_{1,2}}{X_{2,2}} + \left(\frac{X''_{2,1}}{X_{2,1}} + \frac{X''_{2,2}}{X_{2,2}} + \frac{X''_{2,3}}{X_{2,3}} \right) \frac{X_{2,1}X_{2,3}}{X_{1,1}X_{1,3}} = 0.$$

Полагаем
$$\left. \begin{aligned} \frac{X''_{2,2}}{X_{2,2}} &= -m_3^2 \\ \frac{X''_{1,1}}{X_{1,1}} + \frac{X''_{1,3}}{X_{1,3}} &= m_4^2 \end{aligned} \right\}. \quad (1.18)$$

Из второго уравнения (1.18) имеем

$$\frac{X''_{1,1}}{X_{1,1}} = m_4^2 - \frac{X''_{1,3}}{X_{1,3}} \quad \text{или} \quad \frac{X''_{1,1}}{X_{1,1}} = n_3^2 \quad \text{и} \quad \frac{X''_{1,3}}{X_{1,3}} = m_4^2 - n_3^2.$$

Для определённости принимаем $m_4^2 > n_3^2$. Принимаем также $X_{2,1} = X_{1,1}$ (можно принять, что $X_{2,3} = X_{1,3}$). Тогда

$$\left(\frac{X''_{1,2}}{X_{1,2}} + m_4^2 \right) \frac{X_{1,2}}{X_{2,2}} = - \left(\frac{X''_{2,3}}{X_{2,3}} - m_3^2 + n_3^2 \right) \frac{X_{2,3}}{X_{1,3}},$$

что равносильно

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{X''_{1,2}}{X_{1,2}} + m_4^2 \right) \frac{X_{1,2}}{X_{2,2}} &= -m_5 \\ \left(\frac{X''_{2,3}}{X_{2,3}} - m_3^2 + n_3^2 \right) \frac{X_{2,3}}{X_{1,3}} &= m_5 \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

Интегрируя (1.18) и (1.19) при $m_3 = m_4$ и $n_3 = n$ и подставляя полученные результаты в (1.14), находим

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= (a_{15}e^{nx_1} + a_{16}e^{-nx_1}) \left[(a_{17}x_2 \text{Cos} m_3 x_2 + a_{18}x_2 \text{Sin} m_3 x_2 + a_{19} \text{Cos} m_3 x_2 + a_{20} \text{Sin} m_3 x_2) * \right. \\ &* (a_{21}e^{\sqrt{m_3^2 - n^2} x_3} + a_{22}e^{-\sqrt{m_3^2 - n^2} x_3}) + (a_{23} \text{Cos} m_3 x_2 + a_{24} \text{Sin} m_3 x_2) (a_{25}x_3 e^{\sqrt{m_3^2 - n^2} x_3} + a_{26}x_3 e^{-\sqrt{m_3^2 - n^2} x_3} + \\ &+ a_{27}e^{\sqrt{m_3^2 - n^2} x_3} + a_{28}e^{-\sqrt{m_3^2 - n^2} x_3}) \left. \right]. \end{aligned}$$

Налагая на m_1 и m_3 условие, аналогичное условию принятому для постоянных n , т.е. $m_1 = m_3 = m$ и суммируя Φ_1 и Φ_2 , имеем следующее решение уравнения (1.13)

$$\begin{aligned} \Phi &= \left(a_1 e^{\sqrt{m^2 - n^2} x_3} + a_2 e^{-\sqrt{m^2 - n^2} x_3} \right) \left[(a_3 x_1 e^{nx_1} + a_4 x_1 e^{-nx_1} + a_5 e^{nx_1} + a_6 e^{-nx_1}) * \right. \\ &* (a_7 \text{Cos} m x_2 + a_8 \text{Sin} m x_2) + (a_9 e^{nx_1} + a_{10} e^{-nx_1}) (a_{11} x_2 \text{Cos} m x_2 + a_{12} x_2 \text{Sin} m x_2 + \\ &+ a_{13} \text{Cos} m x_2 + a_{14} \text{Sin} m x_2) \left. \right] + (a_{15} e^{nx_1} + a_{16} e^{-nx_1}) \left[(a_{17} x_2 \text{Cos} m x_2 + a_{18} x_2 \text{Sin} m x_2 + \right. \\ &+ a_{19} \text{Cos} m x_2 + a_{20} \text{Sin} m x_2) \left(a_{21} e^{\sqrt{m^2 - n^2} x_3} + a_{22} e^{-\sqrt{m^2 - n^2} x_3} \right) + (a_{23} \text{Cos} m x_2 + \\ &+ a_{24} \text{Sin} m x_2) (a_{25} x_3 e^{\sqrt{m^2 - n^2} x_3} + a_{26} x_3 e^{-\sqrt{m^2 - n^2} x_3} + a_{27} e^{\sqrt{m^2 - n^2} x_3} + a_{28} e^{-\sqrt{m^2 - n^2} x_3}) \left. \right]. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Как и в случае двух переменных x_1 и x_2 , легко видеть, что решение (1.20) отличается от решения уравнения (1.13), найденного методом Фурье (см. (1.25)) и включает последнее как некоторый частный случай.

Рассмотрим задачу, когда решение уравнения (1.13) находится в виде трёх слагаемых, т.е.

$$\Phi = X_{1,1}(x_1)X_{1,2}(x_2)X_{1,3}(x_3) + X_{2,1}(x_1)X_{2,2}(x_2)X_{2,3}(x_3) + X_{3,1}(x_1)X_{3,2}(x_2)X_{3,3}(x_3). \quad (1.21)$$

Подставим (1.21) в (1.13) и преобразуем полученный результат к виду

$$\left(\frac{X''_{1,1}}{X_{1,1}} + \frac{X''_{1,2}}{X_{1,2}} + \frac{X''_{1,3}}{X_{1,3}}\right) \frac{X_{1,1}}{X_{2,1}} + \left(\frac{X''_{2,1}}{X_{2,1}} + \frac{X''_{2,2}}{X_{2,2}} + \frac{X''_{2,3}}{X_{2,3}}\right) \frac{X_{2,2}X_{2,3}}{X_{1,2}X_{1,3}} + \left(\frac{X''_{3,1}}{X_{3,1}} + \frac{X''_{3,2}}{X_{3,2}} + \frac{X''_{3,3}}{X_{3,3}}\right) \frac{X_{3,1}X_{3,2}X_{3,3}}{X_{2,1}X_{1,2}X_{1,3}} = 0$$

Полагаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{X''_{2,1}}{X_{2,1}} &= n_1^2 \\ \frac{X''_{1,2}}{X_{1,2}} + \frac{X''_{1,3}}{X_{1,3}} &= -n_2^2 \end{aligned} \right\}. \quad (1.22)$$

Из последнего уравнения (1.22) имеем

$$\frac{X''_{1,2}}{X_{1,2}} = -m_1^2 \quad \text{и} \quad \frac{X''_{1,3}}{X_{1,3}} = m_1^2 - n_2^2,$$

где для определённости $m_1^2 > n_2^2$

Принимая $X_{1,3} = X_{2,3} = X_{3,3}$ (можно принять также $X_{1,2} = X_{2,2} = X_{3,2}$),

приходим к выражению

$$\left(\frac{X''_{1,1}}{X_{1,1}} - n_2^2\right) \frac{X_{1,1}}{X_{2,1}} + \left(\frac{X''_{2,2}}{X_{2,2}} + m_1^2\right) \frac{X_{2,2}}{X_{1,2}} + \left(\frac{X''_{3,1}}{X_{3,1}} - n_2^2 + \frac{X''_{3,2}}{X_{3,2}} + m_1^2\right) \frac{X_{3,1}X_{3,2}}{X_{2,1}X_{1,2}} = 0.$$

Полагаем далее

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{X''_{3,1}}{X_{3,1}} - n_2^2\right) \frac{X_{3,1}}{X_{2,1}} &= m_2 \\ \left(\frac{X''_{3,2}}{X_{3,2}} + m_1^2\right) \frac{X_{3,2}}{X_{1,2}} &= -m_3 \end{aligned} \right\}. \quad (1.23)$$

Тогда
$$\left(\frac{X''_{1,1}}{X_{1,1}} - n_2^2\right) \frac{X_{1,1}}{X_{2,1}} - m_3 \frac{X_{3,1}}{X_{2,1}} = -\left(\frac{X''_{2,2}}{X_{2,2}} + m_1^2\right) \frac{X_{2,2}}{X_{1,2}} - m_2 \frac{X_{3,2}}{X_{1,2}}.$$

Откуда следует

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{X''_{1,1}}{X_{1,1}} - n_2^2\right) \frac{X_{1,1}}{X_{2,1}} - m_3 \frac{X_{3,1}}{X_{2,1}} &= m_4 \\ \left(\frac{X''_{2,2}}{X_{2,2}} + m_1^2\right) \frac{X_{2,2}}{X_{1,2}} + m_2 \frac{X_{3,2}}{X_{1,2}} &= -m_4 \end{aligned} \right\}. \quad (1.24)$$

Интегрируя (1.22), (1.23), (1.24) и подставляя в (1.21) находим, что при $m_1 = m$ и $n_1 = n_2 = n$

$$\begin{aligned} \Phi_1 = & \left(a_1 e^{\sqrt{m^2 - n^2} x_3} + a_2 e^{-\sqrt{m^2 - n^2} x_3} \right) \left[(a_3 x_1^2 e^{nx_1} + a_4 x_1^2 e^{-nx_1} + a_5 x_1 e^{nx_1} + a_6 x_1 e^{-nx_1} + a_7 e^{nx_1} + a_8 e^{-nx_1}) * \right. \\ & * (a_9 \cos mx_2 + a_{10} \sin mx_2) + (a_{11} e^{nx_1} + a_{12} e^{-nx_1}) (a_{13} x_2^2 \cos mx_2 + a_{14} x_2^2 \sin mx_2 + \\ & + a_{15} x_2 \cos mx_2 + a_{16} x_2 \sin mx_2 + a_{17} \cos mx_2 + a_{18} \sin mx_2) + (a_{19} x_1 e^{nx_1} + a_{20} x_1 e^{-nx_1} + \\ & + a_{21} e^{nx_1} + a_{22} e^{-nx_1}) [(a_{23} x_2 \cos mx_2 + a_{24} x_2 \sin mx_2 + a_{25} \cos mx_2 + a_{26} \sin mx_2)]. \end{aligned}$$

Точно также при $X_{1,1} = X_{2,1} = X_{3,1}$ можно получить

$$\begin{aligned}\Phi_2 = & (a_{27}e^{nx_1} + a_{28}e^{-nx_1})[(a_{29}x_2^2\text{Cosmx}_2 + a_{30}x_2^2\text{Sinmx}_2 + a_{31}x_2\text{Cosmx}_2 + a_{32}x_2\text{Sinmx}_2 + \\ & + a_{33}\text{Cosmx}_2 + a_{34}\text{Sinmx}_2)(a_{35}e^{\sqrt{m^2-n^2}x_3} + a_{36}e^{-\sqrt{m^2-n^2}x_3}) + (a_{37}\text{Cosmx}_2 + a_{38}\text{Sinmx}_2)* \\ & * (a_{39}x_3^2e^{\sqrt{m^2-n^2}x_3} + a_{40}x_3^2e^{-\sqrt{m^2-n^2}x_3} + a_{41}x_3e^{\sqrt{m^2-n^2}x_3} + a_{42}x_3e^{-\sqrt{m^2-n^2}x_3} + a_{43}e^{\sqrt{m^2-n^2}x_3} + \\ & + a_{44}e^{-\sqrt{m^2-n^2}x_3}) + (a_{45}x_2\text{Cosmx}_2 + a_{46}x_2\text{Sinmx}_2 + a_{47}\text{Cosmx}_2 + a_{48}\text{Sinmx}_2)(a_{49}x_3e^{\sqrt{m^2-n^2}x_3} + \\ & + a_{50}x_3e^{-\sqrt{m^2-n^2}x_3} + a_{51}e^{\sqrt{m^2-n^2}x_3} + a_{52}e^{-\sqrt{m^2-n^2}x_3})].\end{aligned}$$

И при $X_{1,2} = X_{2,2} = X_{3,2}$,

$$\begin{aligned}\Phi_3 = & (a_{53}\text{Cosmx}_2 + a_{54}\text{Sinmx}_2)[(a_{55}x_3^2e^{\sqrt{m^2-n^2}x_3} + a_{56}x_3^2e^{-\sqrt{m^2-n^2}x_3} + a_{57}x_3e^{\sqrt{m^2-n^2}x_3} + \\ & + a_{58}x_3e^{-\sqrt{m^2-n^2}x_3} + a_{59}e^{\sqrt{m^2-n^2}x_3} + a_{60}e^{-\sqrt{m^2-n^2}x_3})(a_{61}e^{nx_1} + a_{62}e^{-nx_1}) + (a_{63}x_1^2e^{nx_1} + \\ & + a_{64}x_1^2e^{-nx_1} + a_{65}x_1e^{nx_1} + a_{66}x_1e^{-nx_1} + a_{67}e^{nx_1} + a_{68}e^{-nx_1})(a_{69}e^{\sqrt{m^2-n^2}x_3} + a_{70}e^{-\sqrt{m^2-n^2}x_3}) + (a_{71}x_1e^{nx_1} + \\ & + a_{72}x_1e^{-nx_1} + a_{73}e^{nx_1} + a_{74}e^{-nx_1})(a_{75}x_3e^{\sqrt{m^2-n^2}x_3} + a_{76}x_3e^{-\sqrt{m^2-n^2}x_3} + a_{77}e^{\sqrt{m^2-n^2}x_3} + a_{78}e^{-\sqrt{m^2-n^2}x_3})].\end{aligned}$$

Таким образом, решение уравнения (1.13) имеет вид:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3.$$

В случае, когда решение уравнения (1.18) находится в виде M слагаемых, оно может быть в символической форме представлено так:

$$\begin{aligned}\Phi = & X_1^{M-1}X_2^0X_3^0 + X_1^{M-2}X_2^1X_3^0 + \dots + X_1^0X_2^{M-1}X_3^0 + X_1^0X_2^{M-2}X_3^1 + \dots + \\ & + X_1^kX_2^{M-1-k-t}X_3^t + \dots + X_1X_2^MX_3^{M-2} + X_1^0X_2^0X_3^{M-1} = (X_1 + X_2 + X_3)^{M-1},\end{aligned}$$

Где

$$\begin{aligned}X_1^k = & a_Nx_1^ke^{nx_1} + a_{N+1}x_1^ke^{-nx_1} + a_{N+2}x_1^{k-1}e^{nx_1} + a_{N+3}x_1^{k-1}e^{-nx_1} + \dots + a_{N+2k}e^{nx_1} + a_{N+2k+1}e^{-nx_1}, \\ X_2^{M-1-k-t} = & a_{N+2k+2}x_2^{M-1-k-t}\text{Cosmx}_2 + a_{N+2k+3}x_2^{M-1-k-t}\text{Sinmx}_2 + a_{N+2k+4}x_2^{M-2-k-t}\text{Cosmx}_2 + \\ & + a_{N+2k+5}x_2^{M-2-k-t}\text{Sinmx}_2 + \dots + a_{N+2M-2t}\text{Cosmx}_2 + a_{N+2M-2t+1}\text{Sinmx}_2, \\ X_3^t = & a_{N+2M-2t+2}x_3^te^{\sqrt{m^2-n^2}x_3} + a_{N+2M-2t+3}x_3^te^{-\sqrt{m^2-n^2}x_3} + a_{N+2M-2t+4}x_3^{t-1}e^{\sqrt{m^2-n^2}x_3} + \\ & + a_{N+2M-2t+5}x_3^{t-1}e^{-\sqrt{m^2-n^2}x_3} + \dots + a_{N+2M+2}e^{\sqrt{m^2-n^2}x_3} + a_{N+2M+3}e^{-\sqrt{m^2-n^2}x_3},\end{aligned}$$

N - порядковый номер, $0 \leq k, t < M-1$.

Ниже для сравнения приводится решение уравнения (1.13), найденное методом Фурье для случая M слагаемых

$$\Phi = \sum_{i=1}^M (a_{1,i}e^{n_i x_1} + a_{2,i}e^{-n_i x_1})(a_{3,i}\text{Cosm}_i x_2 + a_{4,i}\text{Sinm}_i x_2)(a_{5,i}e^{\sqrt{m_i^2-n_i^2}x_3} + a_{6,i}e^{-\sqrt{m_i^2-n_i^2}x_3}),$$

когда $n_1 \neq n_2 \neq \dots \neq n_M$ и $m_1 \neq m_2 \neq \dots \neq m_M$.

При $n_1 = n_2 = \dots = n_M$ и $m_1 = m_2 = \dots = m_M$,

$$\Phi = (a_1e^{nx_1} + a_2e^{-nx_1})(a_3\text{Cosmx}_2 + a_4\text{Sinmx}_2)(a_5e^{\sqrt{m^2-n^2}x_3} + a_6e^{-\sqrt{m^2-n^2}x_3}). \quad (1.25)$$

2. Рассмотрим уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_4^2}. \quad (2.1)$$

Пусть его решение имеется, например, в виде двух слагаемых

$$\Phi = X_{1,1}X_{1,2}X_{1,3}X_{1,4} + X_{2,1}X_{2,2}X_{2,3}X_{2,4}. \quad (2.2)$$

Подставляя (2.2) в (2.1) после преобразований имеем:

$$\left(\frac{X'_{1,1}}{X_{1,1}} - \frac{X''_{1,2}}{X_{1,2}} - \frac{X''_{1,3}}{X_{1,3}} - \frac{X''_{1,4}}{X_{1,4}} \right) \frac{X_{1,1}}{X_{2,1}} + \left(\frac{X'_{2,1}}{X_{2,1}} - \frac{X''_{2,2}}{X_{2,2}} - \frac{X''_{2,3}}{X_{2,3}} - \frac{X''_{2,4}}{X_{2,4}} \right) \frac{X_{2,2}X_{2,3}X_{2,4}}{X_{1,2}X_{1,3}X_{1,4}} = 0.$$

Полагаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{X'_{2,1}}{X_{2,1}} &= n_1^2 \\ \frac{X''_{1,2}}{X_{1,2}} + \frac{X''_{1,3}}{X_{1,3}} + \frac{X''_{1,4}}{X_{1,4}} &= n_2^2 \end{aligned} \right\}. \quad (2.3)$$

Из второго уравнения (2.3) находим

$$\frac{X''_{1,3}}{X_{1,3}} + \frac{X''_{1,4}}{X_{1,4}} = n_2^2 - \frac{X''_{1,2}}{X_{1,2}} \text{ или } \frac{X''_{1,2}}{X_{1,2}} = -m_1^2 + n_2^2 \text{ и } \frac{X''_{1,3}}{X_{1,3}} + \frac{X''_{1,4}}{X_{1,4}} = m_1^2.$$

Преобразуем последнее равенство к виду

$$\frac{X''_{1,4}}{X_{1,4}} = m_1^2 - \frac{X''_{1,3}}{X_{1,3}}, \text{ откуда } \frac{X''_{1,4}}{X_{1,4}} = -l_1^2 \text{ и } \frac{X''_{1,3}}{X_{1,3}} = l_1^2 + m_1^2,$$

где l_j - произвольная постоянная, $j = 1, 2, 3, 4$.

Таким образом с учётом (2.3) получаем

$$\left(\frac{X'_{1,1}}{X_{1,1}} - n_2^2 \right) \frac{X_{1,1}}{X_{2,1}} - \left(-n_1^2 + \frac{X''_{2,2}}{X_{2,2}} + \frac{X''_{2,3}}{X_{2,3}} + \frac{X''_{2,4}}{X_{2,4}} \right) \frac{X_{2,2}X_{2,3}X_{2,4}}{X_{1,2}X_{1,3}X_{1,4}} = 0.$$

Принимаем $X_{2,3} = X_{1,3}$ и $X_{2,4} = X_{1,4}$ (можно принять, что $X_{2,2} = X_{1,2}$ и $X_{2,3} = X_{1,3}$ или $X_{2,2} = X_{1,2}$ и $X_{2,4} = X_{1,4}$), после чего имеем

$$\left(\frac{X'_{1,1}}{X_{1,1}} - n_2^2 \right) \frac{X_{1,1}}{X_{2,1}} = \left(\frac{X''_{2,2}}{X_{2,2}} - n_1^2 + m_1^2 \right) \frac{X_{2,2}}{X_{1,2}}.$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{X'_{1,1}}{X_{1,1}} - n_2^2 \right) \frac{X_{1,1}}{X_{2,1}} &= l_3 \\ \left(\frac{X''_{2,2}}{X_{2,2}} - n_1^2 + m_1^2 \right) \frac{X_{2,2}}{X_{1,2}} &= l_3 \end{aligned} \right\}. \quad (2.4)$$

Переменные разделены.

Подставляя результаты интегрирования (2.3) и (2.4) в (2.2) при $m_1^2 > n_1^2$, получаем

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= (a_1 e^{\sqrt{m^2 + l_1^2} x_3} + a_1 e^{-\sqrt{m^2 + l_1^2} x_3}) (a_3 \text{Cos} l_1 x_4 + a_4 \text{Sin} l_1 x_4) [(a_5 x_1 + a_6) e^{n^2 x_1} * \\ &* (a_7 \text{Cos} \sqrt{m^2 - n^2} x_2 + a_8 \text{Sin} \sqrt{m^2 - n^2} x_2) + e^{n^2 x_1} (a_9 x_2 \text{Cos} \sqrt{m^2 - n^2} x_2 + \\ &+ a_{10} x_2 \text{Sin} \sqrt{m^2 - n^2} x_2 + a_{11} \text{Cos} \sqrt{m^2 - n^2} x_2 + a_{12} \text{Sin} \sqrt{m^2 - n^2} x_2)]. \end{aligned}$$

Точно также при $X_{2,2} = X_{1,2}$ и $X_{2,1} = X_{1,1}$ можно получить

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= e^{n^2 x_1} (a_{13} \text{Cos} \sqrt{m^2 - n^2} x_2 + a_{14} \text{Sin} \sqrt{m^2 - n^2} x_2) [(a_{15} x_3 e^{\sqrt{m^2 + l_2^2} x_3} + a_{16} x_3 e^{-\sqrt{m^2 + l_2^2} x_3} + \\ &+ a_{17} e^{\sqrt{m^2 + l_2^2} x_3} + a_{18} e^{-\sqrt{m^2 + l_2^2} x_3}) (a_{19} \text{Cos} l_2 x_4 + a_{20} \text{Sin} l_2 x_4) + (a_{21} e^{\sqrt{m^2 + l_2^2} x_3} + a_{22} e^{-\sqrt{m^2 + l_2^2} x_3}) * \\ &* (a_{23} x_4 \text{Cos} l_2 x_4 + a_{24} x_4 \text{Sin} l_2 x_4 + a_{25} \text{Cos} l_2 x_4 + a_{26} \text{Sin} l_2 x_4)]. \end{aligned}$$

Полагая $l_1 = l_2 = l$ и суммируя Φ_1 и Φ_2 находим решение уравнения (2.1).

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

(Решение уравнения (2.1), найденное методом Фурье см. (2.6))

В случае, когда решение уравнения (2.1) находится в виде M слагаемых, он может быть в символической форме представлено как:

$$\Phi = X_1^{M-1} X_2^0 X_3^0 X_4^0 + X_1^{M-2} X_2^0 X_3^0 X_4^0 + X_1^{M-3} X_2^2 X_3^0 X_4^0 + \dots + X_1^0 X_2^{M-1} X_3^0 X_4^0 + \dots + X_1^k X_2^t X_3^{M-1-k-t-s} X_4^s + \dots + X_1^0 X_2^0 X_3^{M-1} X_4^0 + \dots + X_1^0 X_2^0 X_3^0 X_4^{M-1} = (X_1 + X_2 + X_3 + X_4)^{M-1}. \quad (2.5)$$

Где

$$\begin{aligned} X_1^k &= (a_N x_1^k + a_{N+1} x_1^{k-1} + a_{N+2} x_1^{k-2} + \dots + a_{N+k-1} x_1 + a_{N+k}) e^{n^2 x_1}, \\ X_2^t &= a_{N+k+1} x_2^t \cos \sqrt{m^2 - n^2} x_2 + a_{N+k+2} x_2^t \sin \sqrt{m^2 - n^2} x_2 + a_{N+k+3} x_2^{t-1} \cos \sqrt{m^2 - n^2} x_2 + \\ &+ a_{N+k+4} x_2^{t-1} \sin \sqrt{m^2 - n^2} x_2 + \dots + a_{N+k+2t} \cos \sqrt{m^2 - n^2} x_2 + a_{N+k+2t+1} \sin \sqrt{m^2 - n^2} x_2, \\ X_3^{M-1-k-t-s} &= a_{N+k+2t+2} x_3^{M-1-k-t-s} e^{\sqrt{m^2 + l^2} x_3} + a_{N+k+2t+3} x_3^{M-1-k-t-s} e^{-\sqrt{m^2 + l^2} x_3} + \dots + \\ &+ a_{N+2M-2s-k} e^{\sqrt{m^2 + l^2} x_3} + a_{N+2M-2s-k+1} e^{-\sqrt{m^2 + l^2} x_3}, \\ X_4^s &= a_{N+2M-2s-k+2} x_4^s \cos l x_4 + a_{N+2M-2s+3} x_4^s \sin l x_4 + \dots + a_{N+2M-k+1} \cos l x_4 + a_{N+2M-k+2} \sin l x_4. \end{aligned}$$

Где $0 \leq k, t, s < M-1$

Сравнивая полученное выше решение с решением по методу Фурье уравнения (2.1)

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \sum_{i=1}^M e^{n_i^2 x_1} (a_{1,i} \cos \sqrt{m_i^2 - n_i^2} x_2 + a_{2,i} \sin \sqrt{m_i^2 - n_i^2} x_2) (a_{3,i} e^{\sqrt{m_i^2 + l_i^2} x_3} + a_{4,i} e^{-\sqrt{m_i^2 + l_i^2} x_3}) * \\ &\quad * (a_{5,i} \cos l_i x_4 + a_{6,i} \sin l_i x_4) \\ \text{при } n_1 &\neq n_2 \neq \dots \neq n_M, \quad m_1 \neq m_2 \neq \dots \neq m_M \quad \text{и} \quad l_1 \neq l_2 \neq \dots \neq l_M \quad \text{и} \\ \Phi &= e^{n^2 x_1} (a_1 \cos \sqrt{m^2 - n^2} x_2 + a_2 \sin \sqrt{m^2 - n^2} x_2) (a_3 e^{\sqrt{m^2 + l^2} x_3} + a_4 e^{-\sqrt{m^2 + l^2} x_3}) * \\ &\quad * (a_5 \cos l x_4 + a_6 \sin l x_4) \\ \text{при } n_1 &= n_2 = \dots = n_M, \quad m_1 = m_2 = \dots = m_M \quad \text{и} \quad l_1 = l_2 = \dots = l_M \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Из найденные так же для случая M слагаемых, можно видеть, что решение по предлагаемому методу содержит помимо (2.6) ещё ряд отличных от (2.6) независимых решений.

3. Рассмотрим волновое уравнение.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_4^2}, \quad (3.1)$$

когда его решение имеется в виде трёх слагаемых

$$\Phi = X_{1,1} X_{1,2} X_{1,3} X_{1,4} + X_{2,1} X_{2,2} X_{2,3} X_{2,4} + X_{3,1} X_{3,2} X_{3,3} X_{3,4}. \quad (3.2)$$

Подставляя (3.2) в (3.1), после простых преобразований получаем

$$\begin{aligned} &\left(\frac{X''_{1,1}}{X_{1,1}} - \frac{X''_{1,2}}{X_{1,2}} - \frac{X''_{1,3}}{X_{1,3}} - \frac{X''_{1,4}}{X_{1,4}} \right) \frac{X_{1,1}}{X_{2,1}} + \left(\frac{X''_{2,1}}{X_{2,1}} - \frac{X''_{2,2}}{X_{2,2}} - \frac{X''_{2,3}}{X_{2,3}} - \frac{X''_{2,4}}{X_{2,4}} \right) \frac{X_{2,2} X_{2,3} X_{2,4}}{X_{1,2} X_{1,3} X_{1,4}} + \\ &+ \left(\frac{X''_{3,1}}{X_{3,1}} - \frac{X''_{3,2}}{X_{3,2}} - \frac{X''_{3,3}}{X_{3,3}} - \frac{X''_{3,4}}{X_{3,4}} \right) \frac{X_{3,1} X_{3,2} X_{3,3} X_{3,4}}{X_{2,1} X_{1,3} X_{1,2} X_{1,4}} = 0. \end{aligned}$$

Полагаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{X''_{2,1}}{X_{2,1}} &= n_1^2 \\ \frac{X''_{1,2}}{X_{1,2}} + \frac{X''_{1,3}}{X_{1,3}} + \frac{X''_{1,4}}{X_{1,4}} &= n_2^2 \end{aligned} \right\}. \quad (3.3)$$

Из последнего уравнения (3.3) находим

$$\frac{X''_{1,3}}{X_{1,3}} + \frac{X''_{1,4}}{X_{1,4}} = n_2^2 - \frac{X''_{1,2}}{X_{1,2}} \text{ откуда } \frac{X''_{1,2}}{X_{1,2}} = -m_1^2 + n_2^2 \text{ и } \frac{X''_{1,3}}{X_{1,3}} + \frac{X''_{1,4}}{X_{1,4}} = m_1^2.$$

$$\text{Далее } \frac{X''_{1,4}}{X_{1,4}} = m_1^2 - \frac{X''_{1,3}}{X_{1,3}}, \text{ следовательно } \frac{X''_{1,4}}{X_{1,4}} = -l_1^2 \text{ и } \frac{X''_{1,3}}{X_{1,3}} = l_1^2 + m_1^2,$$

Полагаем $X_{1,3} = X_{2,3} = X_{3,3}$ и $X_{1,4} = X_{2,4} = X_{3,4}$. Прибавим и отнимем в третьем слагаемом левой части, стоящей в скобках, n_3^2 , после элементарных преобразований имеем:

$$\left(\frac{X''_{1,1}}{X_{1,1}} - n_2^2 \right) \frac{X_{1,1}}{X_{2,1}} - \left(\frac{X''_{2,2}}{X_{2,2}} + m_1^2 - n_1^2 \right) \frac{X_{2,2}}{X_{1,2}} + \left(\frac{X''_{3,1}}{X_{3,1}} - n_3^2 - \frac{X''_{3,2}}{X_{3,2}} - m_1^2 + n_3^2 \right) \frac{X_{3,1} X_{3,2}}{X_{2,1} X_{1,2}} = 0.$$

Полагаем

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{X''_{3,1}}{X_{3,1}} - n_3^2 \right) \frac{X_{3,1}}{X_{2,1}} &= l_2 \\ \left(\frac{X''_{3,2}}{X_{3,2}} - n_3^2 + m_1^2 \right) \frac{X_{3,2}}{X_{1,2}} &= l_3 \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

$$\text{Тогда } \left(\frac{X''_{1,1}}{X_{1,1}} - n_2^2 \right) \frac{X_{1,1}}{X_{2,1}} + l_3 \frac{X_{3,1}}{X_{2,1}} = \left(\frac{X''_{2,2}}{X_{2,2}} - n_1^2 + m_1^2 \right) \frac{X_{2,2}}{X_{1,2}} - l_2 \frac{X_{3,2}}{X_{1,2}},$$

Откуда следует

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{X''_{1,1}}{X_{1,1}} - n_2^2 \right) \frac{X_{1,1}}{X_{2,1}} + l_3 \frac{X_{3,1}}{X_{2,1}} &= l_4 \\ \left(\frac{X''_{2,2}}{X_{2,2}} - n_1^2 + m_1^2 \right) \frac{X_{2,2}}{X_{1,2}} - l_2 \frac{X_{3,2}}{X_{1,2}} &= l_4 \end{aligned} \right\}. \quad (3.5)$$

Таким образом, переменные разделились. Интегрируя (3.3), (3.4) и (3.5) и подставляя полученный результат в (3.2) находим

$$\begin{aligned} \Phi_1 = & (a_1 e^{\sqrt{m^2 + l^2} x_3} + a_2 e^{-\sqrt{m^2 + l^2} x_3}) (a_3 \cos l x_4 + a_4 \sin l x_4) [(a_5 x_1^2 e^{n x_1} + a_6 x_1^2 e^{-n x_1} + a_7 x_1 e^{n x_1} + \\ & + a_8 x_1 e^{-n x_1} + a_9 e^{n x_1} + a_{10} e^{-n x_1}) (a_{11} \cos \sqrt{m^2 - n^2} x_2 + a_{12} \sin \sqrt{m^2 - n^2} x_2) + (a_{13} e^{n x_1} + a_{14} e^{-n x_1}) * \\ & * (a_{15} x_2^2 \cos \sqrt{m^2 - n^2} x_2 + a_{16} x_2^2 \sin \sqrt{m^2 - n^2} x_2 + a_{17} x_2 \cos \sqrt{m^2 - n^2} x_2 + a_{18} x_2 \sin \sqrt{m^2 - n^2} x_2 \\ & + a_{19} \cos \sqrt{m^2 - n^2} x_2 + a_{20} \sin \sqrt{m^2 - n^2} x_2) + (a_{21} x_1 e^{n x_1} + a_{22} x_1 e^{-n x_1} + a_{23} e^{n x_1} + a_{24} e^{-n x_1}) * \\ & * (a_{25} x_2 \cos \sqrt{m^2 - n^2} x_2 + a_{26} x_2 \sin \sqrt{m^2 - n^2} x_2 + a_{27} \cos \sqrt{m^2 - n^2} x_2 + a_{28} \sin \sqrt{m^2 - n^2} x_2)]. \end{aligned}$$

Здесь как и ранее принято $n_1 = n_2 = n_3 = n$, $m_1 = m$ и $l_1 = l$.

Точно также при $X_{1,1} = X_{2,1} = X_{3,1}$ и $X_{1,2} = X_{2,2} = X_{3,2}$ можно получить

$$\begin{aligned}\Phi_2 = & (a_{29}e^{nx_1} + a_{30}e^{-nx_1})(a_{31}\cos\sqrt{m^2 - n^2}x_2 + a_{32}\sin\sqrt{m^2 - n^2}x_2)[(a_{33}x_4^2\cos x_4 + a_{34}x_4^2\sin x_4 + \\ & a_{35}x_4\cos x_4 + a_{36}x_4\sin x_4 + a_{37}\cos x_4 + a_{38}\sin x_4)(a_{39}e^{\sqrt{m^2 + l^2}x_3} + a_{40}e^{-\sqrt{m^2 + l^2}x_3}) + \\ & + (a_{41}x_3^2e^{\sqrt{m^2 + l^2}x_3} + a_{42}x_3^2e^{-\sqrt{m^2 + l^2}x_3} + a_{43}x_3e^{\sqrt{m^2 + l^2}x_3} + a_{44}x_3e^{-\sqrt{m^2 + l^2}x_3} + a_{45}e^{\sqrt{m^2 + l^2}x_3} + a_{46}e^{-\sqrt{m^2 + l^2}x_3}) * \\ & * (a_{47}\cos x_4 + a_{48}\sin x_4) + (a_{49}x_3e^{\sqrt{m^2 + l^2}x_3} + a_{50}x_3e^{-\sqrt{m^2 + l^2}x_3} + a_{51}e^{\sqrt{m^2 + l^2}x_3} + a_{52}e^{-\sqrt{m^2 + l^2}x_3}) * \\ & * (a_{53}x_4\cos x_4 + a_{54}x_4\sin x_4 + a_{55}\cos x_4 + a_{56}\sin x_4)].\end{aligned}$$

При $X_{1,1} = X_{2,1} = X_{3,1}$ и $X_{1,4} = X_{2,4} = X_{3,4}$

$$\begin{aligned}\Phi_3 = & (a_{57}e^{nx_1} + a_{58}e^{-nx_1})(a_{59}\cos x_4 + a_{60}\sin x_4)[(a_{61}x_3^2e^{\sqrt{m^2 + l^2}x_3} + a_{62}x_3^2e^{-\sqrt{m^2 + l^2}x_3} + a_{63}x_3e^{\sqrt{m^2 + l^2}x_3} + \\ & + a_{64}x_3e^{-\sqrt{m^2 + l^2}x_3} + a_{65}e^{\sqrt{m^2 + l^2}x_3} + a_{66}e^{-\sqrt{m^2 + l^2}x_3})(a_{67}\cos\sqrt{m^2 - n^2}x_2 + a_{68}\sin\sqrt{m^2 - n^2}x_2) + \\ & + (a_{69}x_2^2\cos\sqrt{m^2 - n^2}x_2 + a_{70}x_2^2\sin\sqrt{m^2 - n^2}x_2 + a_{71}x_2\cos\sqrt{m^2 - n^2}x_2 + a_{72}x_2\sin\sqrt{m^2 - n^2}x_2 + \\ & + a_{73}\cos\sqrt{m^2 - n^2}x_2 + a_{74}\sin\sqrt{m^2 - n^2}x_2)(a_{75}e^{\sqrt{m^2 + l^2}x_3} + a_{76}e^{-\sqrt{m^2 + l^2}x_3}) + (a_{77}x_3e^{\sqrt{m^2 + l^2}x_3} + \\ & + a_{78}x_3e^{-\sqrt{m^2 + l^2}x_3} + a_{79}e^{\sqrt{m^2 + l^2}x_3} + a_{80}e^{-\sqrt{m^2 + l^2}x_3})(a_{81}x_2\cos\sqrt{m^2 - n^2}x_2 + a_{82}x_2\sin\sqrt{m^2 - n^2}x_2 + \\ & + a_{83}\cos\sqrt{m^2 - n^2}x_2 + a_{84}\sin\sqrt{m^2 - n^2}x_2)].\end{aligned}$$

При $X_{1,2} = X_{2,2} = X_{3,2}$ и $X_{1,3} = X_{2,3} = X_{3,3}$

$$\begin{aligned}\Phi_4 = & (a_{85}\cos\sqrt{m^2 - n^2}x_2 + a_{86}\sin\sqrt{m^2 - n^2}x_2)(a_{87}e^{\sqrt{m^2 + l^2}x_3} + a_{88}e^{-\sqrt{m^2 + l^2}x_3}) * [(a_{89}x_1^2e^{nx_1} - \\ & - a_{90}x_1^2e^{-nx_1} + a_{91}x_1e^{nx_1} + a_{92}x_1e^{-nx_1} + a_{93}e^{nx_1} + a_{94}e^{-nx_1})(a_{95}\cos x_4 + a_{96}\sin x_4) + (a_{97}x_4^2\cos x_4 + \\ & + a_{98}x_4^2\sin x_4 + a_{99}x_4\cos x_4 + a_{100}x_4\sin x_4 + a_{101}\cos x_4 + a_{102}\sin x_4)(a_{103}e^{nx_1} + a_{104}e^{-nx_1}) + \\ & + (a_{105}x_1e^{nx_1} + a_{106}x_1e^{-nx_1} + a_{107}e^{nx_1} + a_{108}e^{-nx_1})(a_{109}x_4\cos x_4 + a_{110}x_4\sin x_4 + \\ & + a_{111}\cos x_4 + a_{112}\sin x_4)].\end{aligned}$$

При $X_{1,3} = X_{2,3} = X_{3,3}$ и $X_{1,1} = X_{2,1} = X_{3,1}$

$$\begin{aligned}\Phi_5 = & (a_{113}e^{\sqrt{m^2 + l^2}x_3} + a_{114}e^{-\sqrt{m^2 + l^2}x_3})(a_{115}e^{nx_1} + a_{116}e^{-nx_1})[(a_{117}x_2^2\cos\sqrt{m^2 - n^2}x_2 + \\ & a_{118}x_2^2\sin\sqrt{m^2 - n^2}x_2 + a_{119}x_2\cos\sqrt{m^2 - n^2}x_2 + a_{120}x_2\sin\sqrt{m^2 - n^2}x_2 + a_{121}\cos\sqrt{m^2 - n^2}x_2 + \\ & + a_{122}\sin\sqrt{m^2 - n^2}x_2)(a_{123}\cos x_4 + a_{124}\sin x_4) + (a_{125}x_4^2\cos x_4 + a_{126}x_4^2\sin x_4 + a_{127}x_4\cos x_4 + \\ & + a_{128}x_4\sin x_4 + a_{129}\cos x_4 + a_{130}\sin x_4)(a_{131}\cos\sqrt{m^2 - n^2}x_2 + a_{132}\sin\sqrt{m^2 - n^2}x_2) + \\ & + (a_{133}x_2\cos\sqrt{m^2 - n^2}x_2 + a_{134}x_2\sin\sqrt{m^2 - n^2}x_2 + a_{135}\cos\sqrt{m^2 - n^2}x_2 + a_{136}\sin\sqrt{m^2 - n^2}x_2) * \\ & * (a_{137}x_4\cos x_4 + a_{138}x_4\sin x_4 + a_{139}\cos x_4 + a_{140}\sin x_4)].\end{aligned}$$

При $X_{1,2} = X_{2,2} = X_{3,2}$ и $X_{1,4} = X_{2,4} = X_{3,4}$

$$\begin{aligned}\Phi_6 = & (a_{141}\cos\sqrt{m^2-n^2}x_2 + a_{142}\sin\sqrt{m^2-n^2}x_2)(a_{143}\cos lx_4 + a_{144}\sin lx_4)[(a_{145}x_3^2 e^{\sqrt{m^2+l^2}x_3} + \\ & + a_{146}x_3^2 e^{-\sqrt{m^2+l^2}x_3} + a_{147}x_3 e^{\sqrt{m^2+l^2}x_3} + a_{148}x_3 e^{-\sqrt{m^2+l^2}x_3} + a_{149}e^{\sqrt{m^2+l^2}x_3} + a_{150}e^{-\sqrt{m^2+l^2}x_3}) * \\ & * (a_{151}e^{nx_1} + a_{152}e^{-nx_1}) + (a_{153}x_1^2 e^{nx_1} + a_{154}x_1^2 e^{-nx_1} + a_{155}x_1 e^{nx_1} + a_{156}x_1 e^{-nx_1} + a_{157}e^{nx_1} + a_{158}e^{-nx_1}) * \\ & * (a_{159}e^{\sqrt{m^2+l^2}x_3} + a_{160}e^{-\sqrt{m^2+l^2}x_3}) + (a_{161}x_3 e^{\sqrt{m^2+l^2}x_3} + a_{162}x_3 e^{-\sqrt{m^2+l^2}x_3} + a_{163}e^{\sqrt{m^2+l^2}x_3} + \\ & + a_{164}e^{-\sqrt{m^2+l^2}x_3}) * (a_{165}x_1 e^{nx_1} + a_{166}x_1 e^{-nx_1} + a_{167}e^{nx_1} + a_{168}e^{-nx_1})].\end{aligned}$$

Таким образом, решение уравнения (3.1) имеет вид

$$\Phi = \sum_{j=1}^6 \Phi_j$$

Решение уравнения (3.1) по методу Фурье, известно как

$$\begin{aligned}\Phi = & (a_1 e^{nx_1} + a_2 e^{-nx_1})(a_3 \cos\sqrt{m^2-n^2}x_2 + a_4 \sin\sqrt{m^2-n^2}x_2)(a_5 e^{\sqrt{m^2+l^2}x_3} + \\ & + a_6 e^{-\sqrt{m^2+l^2}x_3})(a_7 \cos lx_4 + a_8 \sin lx_4).\end{aligned}$$

В случае M слагаемых решение уравнения (3.1) по предлагаемому методу в символической форме может быть представлено аналогично (2.5), где

$$X_1^k = a_N x_1^k e^{nx_1} + a_{N+1} x_1^k e^{-nx_1} + a_{N+2} x_1^{k-1} e^{nx_1} + a_{N+3} x_1^{k-1} e^{-nx_1} + \dots + a_{N+2k} e^{nx_1} + a_{N+2k+1} e^{-nx_1}, \quad a$$

$X_2, X_3, \text{ и } X_4$ совпадают с принятыми в (2.5) их значениями, за исключением индексов у a . В данном случае к каждому из этих индексов необходимо дополнительно прибавить k . В качестве некоторых возможных направлений практического использования предлагаемого метода разделения переменных укажем следующее:

Известно, например, что решение задач теории упругости сводится к отысканию тех или иных форм решений бигармонического уравнения, способных удовлетворить поставленным граничным условиям. Число этих форм решений в настоящее время ограничено, в связи чем ряд задач остаётся нерешённым.

Предлагаемый метод разделения переменных при интегрировании бигармонического уравнения позволяет получать бесконечное число новых форм решений, некоторые из которых могут оказаться практически полезными в вышеуказанном смысле.

Далее рассмотрим движение электромагнитной волны в вакууме, описываемое уравнением вида (3.1). Решение этого уравнения по методу Фурье для случая одномерного пространства определяет при постоянстве энергии излучения пакет плоских монохроматических волн, которые в сумме образуют незатухающую волну с постоянными во времени и пространстве амплитудой и частотой.

Решение аналогичного волнового уравнения с помощью предлагаемого метода разделения переменных, определяет уже некоторую совокупность бесконечного числа волновых пакетов, которая образует волну с возрастающей, вследствие наличия в этом решении степенных множителей от $x_1, x_2, x_3 \text{ и } x_4$ во времени и пространстве, амплитудой. Поскольку движение этой волны происходит без изменения энергии, то по закону её сохранения, с возрастанием

амплитуды должна убывать частота волны. Иными словами: при движении электромагнитной волны в вакууме должно наблюдаться смещение спектра волны в сторону более низких частот. Это, например, позволяет рассмотреть вопрос о “красном смещении”, наблюдаемой во Вселенной с позиции нерасширяющейся видимой её части.

Обозначения принятые в работе.

x_i - независимая переменная, $i = 1 \div 4$.

$\Phi_{1,i}(x_1)$, $\Phi_2(x_2)$, и $\Phi_3(x_3)$ - функции, зависящие соответственно от x_1 , x_2 и x_3 ;

$X_{1,i}$; $X_{2,i}$; $X_{3,i}$; $X_{4,i}$ и $X_{5,i}$ - функции, зависящие от одной из переменных x_i ;

$C_1 \div C_4$; $C_1^* \div C_4^*$; a_i ; a_N ; n_j ; m_j и l_j - постоянные интегрирования, где $i = 1, 2, \dots$; $N = 1, 2, \dots$ и $j = 1, 2, \dots$ - порядковые номера.

О ПОЛУЧЕНИИ НОВЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

§ 1 Новый метод разделения переменных (Предварительное рассмотрение)

Как известно, для решения задач математической физики во многих случаях применим, так называемый метод Фурье (или иначе метод разделения переменных).

Он заключается в том, что частное решение линейного дифференциального уравнения в частных производных (или в дальнейшем, для краткости, просто уравнения) находится в виде произведения функций, каждая из которых зависит лишь от одной переменной. При этом число указанных функций-сомножителей всегда равно числу независимых переменных.

Например, частное решение простейшего уравнения эллиптического типа – уравнения Лапласа, в случае двух независимых переменных ζ и φ

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (1.1)$$

Находится в виде

$$\Phi = R_{(r)} \cdot \theta_{(\varphi)},$$

где $R_{(r)}$ и $\theta_{(\varphi)}$ – функции, зависящие соответственно лишь от одной переменной r или φ .

Для получения более общего или, как говорят, обобщенного решения линейного уравнения, вследствие его линейности все частные решения суммируются.

Например, для уравнения (1.1) обобщенным решением будет являться выражение:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{\infty} R_{i(r)} \theta_{i(\varphi)},$$

где индекс i – определяет фундаментальные числа конкретной физической задачи.

Не останавливаясь на подробном рассмотрении метода Фурье и его возможностях, которые можно найти во всех курсах по уравнениям математической физики, отметим лишь следующие два момента, касающихся этого метода, общность которых при внимательном рассмотрении может быть поставлена под сомнение:

а) определение методом Фурье частного решения уравнения в виде произведения числа функций (каждая из которых зависит лишь от одной переменной), равного числу независимых переменных, с точки зрения получения наиболее общего вида решения не является строго обоснованным.

При построении частного решения методом разделения переменных число функций, зависящих лишь от одной переменной и входящих в это решение, может быть принятым и большим числа независимых переменных.

б) решение уравнения, полученное методом Фурье или другим известным методом, содержит число произвольных постоянных равное произведению порядка уравнения на число его независимых переменных. Это положение также не имеет строго обоснования. Тем не менее решение, содержащее указанное число постоянных молчаливо принимается за общее решение. Исключение в этом вопросе составляют обыкновенные дифференциальные уравнения, где теория строго обосновывает число произвольных постоянных в зависимости от порядка уравнения. Таким образом можно, по-видимому предположить, что решение уравнения может содержать большее число произвольных постоянных, нежели обычно.

В дальнейшем будет показано, что высказанные здесь оба суждения (а и б) являются не безосновательными и при соответствующей обработке приводят к новым качественным результатам.

В настоящем параграфе изложен новый метод разделения переменных линейных дифференциальных уравнений в частных производных, являющийся более общим, чем метод Фурье и включающий его как некоторый частный случай. Рассмотрение и обоснование метода проведено на примере решения уравнения Лапласа, имеющего важное прикладное значение в физике.

Новый метод заключается в том, что частное решение уравнения от n независимых переменных находится в виде суммы n слагаемых, каждое из которых, в свою очередь является произведением n произвольных, зависящих только от одной из самостоятельных переменных, функций.

При этом на слагаемые не накладывается условие, чтобы они по отдельности являлись решением рассматриваемого уравнения. Если такое условие наложить, то мы придём к решению ничем не отличающемуся от решения, полученного методом Фурье.

Итак, следуя изложенному, будем искать частное решение уравнения (1.1) в виде суммы

$$\Phi = f_{1(r)} \cdot \theta_{(\varphi)} + f_{2(\varphi)} \cdot R_{(r)}, \quad (1.2)$$

где $R_{(r)}$, $f_{1(r)}$ и $\theta_{(\varphi)}$, $f_{2(\varphi)}$ - функции, зависящие от одной переменной ζ или φ .

Подставляя (1.2) в (1.1) и преобразовывая, имеем

$$r^2 \frac{f_1''}{R} + r \frac{f_1'}{R} + \frac{f_1}{R} \frac{\theta''}{\theta} = - \frac{f_2}{\theta} \left(r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} \right) - \frac{f_2''}{\theta}. \quad (1.3)$$

Поскольку функции R и θ оставались произвольными, то для полного разделения переменных достаточно в выражении (1.3) положить

$$\frac{\theta''}{\theta} = -n^2;$$

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} = n^2,$$
(1.4)

где n - некоторая постоянная (параметр).

Условия (1.4) аналогичны требованию, чтобы выражение

$$R\theta = (C_1^* r^n + C_2^* r^{-n})(C_3^* \text{Cos} n\varphi + C_4^* \text{Sinn} \varphi)$$
(1.5)

являлось известным решением (1.1), получаемым методом Фурье. Условия (1.4) назовём первой вариацией параметра n .

Таким образом, левая часть (1.3) зависит только от r и не зависит от φ , а правая – наоборот, следовательно, каждая из них не зависит ни от r , ни от φ , т.е. они постоянны. Обозначим эту постоянную через m , тогда из (1.3) следует, что

$$\left. \begin{aligned} r^2 f_1'' + r f_1' - n^2 f_1 &= m^2 R \\ f_2'' + n^2 f_2 &= -m^2 \theta \end{aligned} \right\}.$$
(1.6)

Решая последние два уравнения методом вариации постоянных, находим:

$$f_1 = C_1^{**} r^n \ln r - C_2^{**} r^{-n} \ln r + C_3^* r^n + C_4^* r^{-n}$$

$$f_2 = C_7^* \text{Cos} n\varphi + C_8^* \text{Sinn} \varphi + C_4^{**} \varphi \text{Cos} n\varphi - C_3^{**} \varphi \text{Sinn} \varphi.$$

После подстановки найденных значений функций R, θ, f_1 и f_2 в (1.2) и некоторых преобразований, частное решение уравнения (1.1) окончательно принимает вид:

$$\Phi_i = (C_{1,i} r^{n_i} + C_{2,i} r^{-n_i})(C_{3,i} \text{Cos} n_i \varphi + C_{4,i} \text{Sinn}_i \varphi) + (C_{5,i} r^{n_i} \ln r + C_{6,i} r^{-n_i} \ln r) * \\ * (C_{7,i} \text{Cos} n_i \varphi + C_{8,i} \text{Sinn}_i \varphi) + (-C_{5,i} r^{n_i} + C_{6,i} r^{-n_i})(C_{8,i} \varphi \text{Cos} n_i \varphi - C_{7,i} \varphi \text{Sinn}_i \varphi),$$
(1.7)

где $C_{1,i}, C_{2,i}, C_{3,i}, C_{4,i}, C_{5,i}, C_{6,i}, C_{7,i}, C_{8,i}$ - постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий.

Как видно из (1.7) оно содержит два различных по структуре самостоятельных решений уравнения (1.1).

Первое из них, совпадающее с известным решением уравнения Лапласа и представляющее гармоническую в современном понимании функцию, обозначим как

$$\Phi_i^* = (C_{1,i} r^{n_i} + C_{2,i} r^{-n_i})(C_{3,i} \text{Cos} n_i \varphi + C_{4,i} \text{Sinn}_i \varphi).$$
(1.8)

Второе решение, содержащее два неперiodических слагаемых, каждое из которых в отличие от (1.8) не удовлетворяет (1.1), обозначим

$$\Phi_i^{**} = (C_{5,i} r^{n_i} \ln \zeta + C_{6,i} r^{-n_i} \ln r)(C_{7,i} \text{Cos} n_i \varphi + C_{8,i} \text{Sinn}_i \varphi) + (-C_{5,i} r^{n_i} + C_{6,i} r^{-n_i}) * \\ * (C_{8,i} \varphi \text{Cos} n_i \varphi - C_{7,i} \varphi \text{Sinn}_i \varphi)$$
(1.9)

и назовём квазигармонической функцией.

Функцию (1.7), включающую в себя как гармоническую, так и квазигармоническую составляющие будем в дальнейшем называть гармонической в целом функцией.

Параметр m , введённый нами при разделении переменных, входит в состав коэффициентов $C_{5,i} \div C_{8,i}$ в качестве множителя и определяется совместно с ними из граничных условий. В связи с этим он не может определять фундаментальных чисел конкретной задачи как, например, параметр n .

В остальном m остаётся произвольным и на него, следовательно, может быть наложено одно из полезных для нас условий. При $m=0$ Φ_i^{**} также равно нулю и (1.7) принимает вид (1.8). Формула (1.7) дающая частные решения уравнения (1.1), получает существенно различный вид в зависимости от того, какое значение (или вариацию) имеет параметр n .

Второй вариацией параметра назовём условие, когда $n=0$. Решение уравнения (1.1) при этом выглядит так:

$$\Phi_{n=0} = (C_1 \ln r + C_2)(C_3 \varphi + C_4) + (C_5 \ln^3 r + C_6 \ln^2 r)(C_7 \varphi + C_8) - (C_5 \ln r + \frac{C_6}{3}) * (C_7 \varphi^3 + 3C_6 \varphi^2).$$

Первое произведение, стоящее в правой части, является обычным решением, получаемым с помощью метода Фурье при $n=0$.

Третьей вариацией параметра назовём условия:

$$\frac{\theta''}{\theta} = -\gamma_1^2 \text{ и } r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} = \gamma_2^2.$$

В этом случае частным решением уравнения (1.1) служит выражение:

$$\Phi_\gamma = (C_1 r^{\gamma_2} + C_2 r^{-\gamma_2})(C_3 \cos \gamma_2 \varphi + C_4 \sin \gamma_2 \varphi) + (C_5 r^{\gamma_1} + C_6 r^{-\gamma_1})(C_7 \cos \gamma_1 \varphi + C_8 \sin \gamma_1 \varphi).$$

Другие значения параметра n , которые могут иметь место, будут являться производными от рассмотренных выше вариаций.

Естественно далее предположить, что в рассматриваемой задаче чисел n_i может быть бесконечно много. При этом могут представлять интерес только те из них, которые определяют не тривиальное решение уравнения (1.1).

В качестве такого решения можно рассмотреть ряд

$$\Phi = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i, \quad (1.10)$$

равномерно сходящийся при некоторых условиях к обобщённому решению Φ уравнения (1.1).

Полученное нами решение вида (1.10) пока является чисто формальным, т.к. ещё не ставился вопрос о граничных условиях задачи и не требовалось от этого решения удовлетворения этим граничным условиям. Кроме того необходимо также предварительно определить условия при которых ряд (1.10) сходится.

§ 2 Общие свойства гармоничных и квазигармоничных функций

Теорема 1.

Фундаментальные функции вида f_2 , удовлетворяющие при $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$ граничным условиям $\alpha f_2' + \beta f_2 = 0$, где α и β постоянные, обладают свойством обобщённой ортогональности, т.е.

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2,i} f_{2,j} d\varphi = 0 \text{ при } i \neq j.$$

Действительно по построению своему функции вида f_2 удовлетворяют второму уравнению (1.6), если заменить в нём n^2 на n_i^2 и n_j^2 , а m^2 на m_i^2 и m_j^2 . Тогда

$$\left. \begin{aligned} f_{2,i}'' + n_i^2 f_{2,i} + m_i^2 \theta_i &= 0 \\ f_{2,j}'' + n_j^2 f_{2,j} + m_j^2 \theta_j &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (2.1)$$

Умножим первое уравнение на θ_j , а второе на θ_i и вычтем почленно одно из другого. Интегрируя затем полученное выражение по промежутку (φ_1, φ_2) , находим:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (f_{2,i}'' \theta_j - \theta_i f_{2,j}'') d\varphi + n_i^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2,i} \theta_j d\varphi - n_j^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2,j} \theta_i d\varphi + (m_i^2 - m_j^2) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \theta_i \theta_j d\varphi = 0.$$

Берём первый интеграл по частям дважды

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2,i}'' \theta_j d\varphi = (f_{2,i}' \theta_j - f_{2,i} \theta_j')_{\varphi_1}^{\varphi_2} - n_j^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2,i} \theta_j d\varphi.$$

Производя точно такие же действия со вторым интегралом и подставляя полученные результаты в исходное равенство, имеем:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \theta_i f_{2,j} d\varphi + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2,j} \theta_j d\varphi &= -\frac{1}{n_i^2 - n_j^2} [(f_{2,i}' \theta_j - f_{2,i} \theta_j')_{\varphi_1}^{\varphi_2} + (f_{2,j} \theta_i' - f_{2,j}' \theta_i)_{\varphi_1}^{\varphi_2} + \\ &+ (m_i^2 - m_j^2) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \theta_i \theta_j d\varphi]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Умножим далее первое уравнение (2.1) на $f_{2,j}''$, а второе на $f_{2,i}''$ и вычтем почленно одно из другого. Интегрируя полученное выражение, как и ранее по промежутку (φ_1, φ_2) , находим:

$$n_i^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2,i} f_{2,j}'' d\varphi - n_j^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2,j} f_{2,i}'' d\varphi + m_i^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \theta_i f_{2,j}'' d\varphi - m_j^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \theta_j f_{2,i}'' d\varphi = 0.$$

Берём третий и четвёртый интегралы по частям дважды. После уже известных преобразований получаем:

$$\begin{aligned} m_i^2 n_i^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2,j} \theta_i d\varphi - m_j^2 n_j^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2,i} \theta_j d\varphi &= n_i^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2,i} f_{2,j}'' d\varphi - n_j^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2,j} f_{2,i}'' d\varphi + [m_i^2 (f_{2,j}' \theta_i - f_{2,j} \theta_i') + \\ &+ m_j^2 (f_{2,i} \theta_j' - f_{2,i}' \theta_j)]_{\varphi_1}^{\varphi_2}. \end{aligned}$$

Умножим затем первое уравнение (2.1) на $n_j^2 f_{2,j}$, а второе на $n_i^2 f_{2,i}$. Проведя преобразования аналогичные предыдущим, приходим к следующему выражению:

$$m_i^2 n_j^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \theta_i f_{2,j} d\varphi - m_j^2 n_i^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \theta_j f_{2,i} d\varphi = n_i^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2,i} f_{2,j}'' d\varphi - n_j^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2,j} f_{2,i}'' d\varphi.$$

Исключая из последних двух равенств слагаемое

$$n_i^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2,i} f_{2,j}'' d\varphi - n_j^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2,j} f_{2,i}'' d\varphi,$$

получаем

$$m_i^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2,j} \theta_i d\varphi + m_j^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2,i} \theta_j d\varphi = \frac{1}{n_i^2 - n_j^2} [m_i^2 (f_{2,j}' \theta_i - f_{2,i} \theta_j') + m_j^2 (f_{2,i}' \theta_j - f_{2,j}' \theta_i)]_{\varphi_1}^{\varphi_2}. \quad (2.3)$$

Наконец, умножим первое уравнение (2.1) на $f_{2,j}$, а второе на $f_{2,i}$ и соблюдая вышеприведённую последовательность действий, имеем

$$m_i^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \theta_i f_{2,j} d\varphi - m_j^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2,i} \theta_j d\varphi = (n_i^2 - n_j^2) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2,i} f_{2,j} d\varphi - (f_{2,i}' f_{2,j} - f_{2,j}' f_{2,i})_{\varphi_1}^{\varphi_2}. \quad (2.4)$$

Преобразуем (2.2)

$$m_i^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \theta_i f_{2,j} d\varphi = -m_j^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2,i} \theta_j d\varphi - \frac{m_i^2}{n_i^2 - n_j^2} [(f_{2,i}' \theta_j - f_{2,i} \theta_j')_{\varphi_1}^{\varphi_2} + (f_{2,j}' \theta_i - f_{2,j} \theta_i')_{\varphi_1}^{\varphi_2} + (m_i^2 - m_j^2) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \theta_i \theta_j d\varphi],$$

и подставим сначала в (2.3)

$$(m_j^2 - m_i^2) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2,i} \theta_j d\varphi = \frac{1}{n_i^2 - n_j^2} [m_i^2 (f_{2,j}' \theta_i - f_{2,i} \theta_j') + m_j^2 (f_{2,i}' \theta_j - f_{2,i} \theta_j')]_{\varphi_1}^{\varphi_2} + \frac{m_i^2}{n_i^2 - n_j^2} * \\ * \{ [(f_{2,i}' \theta_j - f_{2,i} \theta_j')_{\varphi_1}^{\varphi_2} + (f_{2,j}' \theta_i - f_{2,j} \theta_i')_{\varphi_1}^{\varphi_2}] + (m_i^2 - m_j^2) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \theta_i \theta_j d\varphi \},$$

а затем в (2.4)

$$-(m_j^2 - m_i^2) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2,i} \theta_j d\varphi = -(n_i^2 - n_j^2) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2,i} f_{2,j} d\varphi - (f_{2,i}' f_{2,j} - f_{2,j}' f_{2,i})_{\varphi_1}^{\varphi_2} + \frac{m_i^2}{n_i^2 - n_j^2} * \\ * [(m_i^2 - m_j^2) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \theta_i \theta_j d\varphi + (f_{2,i}' \theta_j - f_{2,i} \theta_j')_{\varphi_1}^{\varphi_2} + (f_{2,j}' \theta_i - f_{2,j} \theta_i')_{\varphi_1}^{\varphi_2}].$$

Исключая из последних двух выражений $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2,i} \theta_j d\varphi$, после преобразования

находим:

$$(n_i^4 - n_j^4) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2,i} f_{2,j} d\varphi = -2m_i^2 m_j^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \theta_i \theta_j d\varphi - [(n_i^2 - n_j^2) (f_{2,i}' f_{2,j} - f_{2,j}' f_{2,i}) + \\ + m_j^2 (f_{2,i}' \theta_j - f_{2,i} \theta_j') - m_i^2 (f_{2,j}' \theta_i - f_{2,j} \theta_i')]_{\varphi_1}^{\varphi_2}. \quad (2.5)$$

Согласно определения

$$\left. \begin{aligned} \alpha f'_{2(\varphi_1)} + \beta f_{2(\varphi_1)} &= 0 \\ \alpha f'_{2(\varphi_2)} + \beta f_{2(\varphi_2)} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (2.6)$$

Поскольку условию (2.6) должны удовлетворять все частные решения уравнения (1.1), то

$$\left. \begin{aligned} \alpha f'_{2,i(\varphi_1)} + \beta f_{2,i(\varphi_1)} &= 0 \\ \alpha f'_{2,j(\varphi_1)} + \beta f_{2,j(\varphi_1)} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (2.7)$$

Умножая первое уравнение (2.7) на $f_{2,j(\varphi_1)}$, второе на $f_{2,i(\varphi_1)}$ и вычитая почленно одно из другого, получаем

$$\left. \begin{aligned} f'_{2,i}(\varphi_1)f_{2,j}(\varphi_1) - f'_{2,j}(\varphi_1)f_{2,i}(\varphi_1) &= 0 \\ \text{Точно также находим} \\ f'_{2,i}(\varphi_2)f_{2,j}(\varphi_2) - f'_{2,j}(\varphi_2)f_{2,i}(\varphi_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

По построению f_2

$$\left. \begin{aligned} \alpha \theta'_j(\varphi_1) + \beta \theta_j(\varphi_1) &= 0 \\ \alpha \theta'_i(\varphi_1) + \beta \theta_i(\varphi_1) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (2.8)$$

Умножая первое уравнение (2.7) на $\theta_j(\varphi_1)$ и первое уравнение (2.8) на $f_{2,i}(\varphi_1)$ и преобразовывая уже известным образом, имеем:

$$\left. \begin{aligned} f'_{2,i}(\varphi_1)\theta_j(\varphi_1) - \theta'_j(\varphi_1)f_{2,i}(\varphi_1) &= 0 \\ \text{и аналогично} \\ f'_{2,i}(\varphi_2)\theta_j(\varphi_2) - \theta'_j(\varphi_2)f_{2,i}(\varphi_2) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (b)$$

Производя подобные действия со вторыми уравнениями (2.7) и (2.8), легко определить, что

$$\left. \begin{aligned} f_{2,j}(\varphi_1)\theta'_i(\varphi_1) - \theta_i(\varphi_1)f'_{2,j}(\varphi_1) &= 0 \\ f_{2,j}(\varphi_2)\theta'_i(\varphi_2) - \theta_i(\varphi_2)f'_{2,j}(\varphi_2) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (c)$$

Сравнивая полученные результаты (a), (b) и (c) с правой частью (2.5) и вспоминая, что при $i \neq j \quad \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \theta_i \theta_j d\varphi = 0$ убеждаемся в справедливости теоремы.

Доказательство соотношения $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \theta_i \theta_j d\varphi = 0$ при $i \neq j$ было дано впервые академиком В.А. Стекловым.

Следствие

$$\text{При } i \neq j \quad \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2,i} \theta_j d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2,j} \theta_i d\varphi = 0 \quad \text{и} \quad \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2,i}^* f_{2,j}^* d\varphi = 0,$$

где $f_{2(i,j)}^* = C_{(i,j)} \varphi \cos n_{(i,j)} \varphi + d_{(i,j)} \varphi \sin n_{(i,j)} \varphi$,

$C_{(i,j)}$ и $d_{(i,j)}$ - произвольные постоянные.

Теорема 2

Если n_i одно из фундаментальных чисел рассматриваемой задачи о фундаментальных функциях, а $f_{2,i}$ соответствующая ему нормированная фундаментальная функция, то для любой непрерывно дифференцируемой функции $\psi(\varphi)$ в интервале (φ_1, φ_2) всегда можно подобрать такое значение m_i , что

$$G(f_{2,i}, \psi) = n_i^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \theta_i \psi d\varphi = n_i^2 H(\theta_i, \psi),$$

где $G(f_{2,i}, \psi)$ и $H(\theta_i, \psi)$ - соответствующие билинейные функционалы. Действительно интегрируя функционал $G(f_{2,i}, \psi)$ по частям и принимая во внимание первое уравнение (2.1), получаем

$$\begin{aligned} G(f_{2,i}, \psi) &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (-f'_{2,i} \psi' + n_i^2 f_{2,i} \psi) d\varphi = -f'_{2,i} \psi \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \psi (f''_{2,i} + n_i^2 f_{2,i}) d\varphi = \\ &= -f'_{2,i} \psi \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} - m_i^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \theta_i \psi d\varphi. \end{aligned}$$

Поскольку m_i^2 оставалось произвольным, то полагая его равным

$$-\frac{f'_{2,i} \psi \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2}}{H(\theta_i, \psi)} - n_i^2,$$

получаем тем самым подтверждение теоремы.

Если $\psi(\varphi)$ на границах интервала обращается в нуль, то на m_i^2 при доказательстве не требуется накладывать указанного выше условия.

Следствие

Если фундаментальные функции θ_i и $f_{2,i}$ отнормировать так, чтобы

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \theta_i f_{2,i} d\varphi = 1$$

(для чего достаточно умножить эти функции соответственно на величину $\frac{1}{\sqrt{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2,i}^2 d\varphi}}$) то $G(f_{2,i}) = n_i^2$.

Принимая во внимание следствие теоремы 1, получаем

$$G(f_{2,i}, f_{2,j}) = 0 \text{ при } i \neq j.$$

Теорема 3

Фундаментальные числа n_i ограничены снизу

$$\text{В самом деле } G(f_{2,i}) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (-f_{2,i}'^2 + n_i^2 f_{2,i}^2) d\varphi > - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2,i}'^2 d\varphi.$$

Т.к. интеграл стоящий в правой части (если произвести его непосредственное вычисление и учесть, забегая несколько вперёд, что $C_7^* = A_i$ и $C_4^{**} = C_i$ выражаются как (2.13), а $A_i n_i$ и $C_i n_i$ как видно из (2.14) – суть величины ограниченные и представляют собой некоторую постоянную) есть величина ограниченная, то функционал $G(f_{2,i})$ ограничен снизу. Учитывая, что при

$H(\theta_i, f_{2,i}) = 1$, $G(f_{2,i}) = n_i^2$, получаем, что фундаментальные числа n_i также ограничены снизу.

Результаты всех приведённых выше доказательств справедливы также в случае граничных условий вида

$$\left. \begin{array}{l} f_2'(\varphi = \varphi_1) = 0 \\ f_2'(\varphi = \varphi_2) = 0 \end{array} \right\} \text{ или } \left. \begin{array}{l} f_2(\varphi = \varphi_1) = 0 \\ f_2(\varphi = \varphi_2) = 0 \end{array} \right\}.$$

В последнем легко убедиться, применяя изложенные выше приёмы.

Теорема 4

Произвольная достаточно гладкая в интервале (φ_1, φ_2) функция $F(\varphi)$ удовлетворяющая граничным условиям $F(\varphi_1) = F(\varphi_2) = 0$ может быть предоставлена в этом интервале равномерно сходящимся рядом вида

$$F(\varphi) = \sum_{i=1}^{\infty} f_{2,i} = \sum_{i=1}^{\infty} (A_i \text{Cos} n_i \varphi + B_i \text{Sinn}_i \varphi + C_i \varphi \text{Cos} n_i \varphi + d_i \varphi \text{Sinn}_i \varphi), \quad (2.9)$$

где n_i всё возрастающая последовательность фундаментальных чисел $n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_i < \dots$, A_i, B_i, C_i, d_i - постоянные, определяемые выражениями

$$A_i = \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(\varphi) (\text{Cos} n_i \varphi + k_i \text{Sinn}_i \varphi) d\varphi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi^2 (\text{Cos} n_i \varphi + L_i \text{Sinn}_i \varphi)^2 d\varphi - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(\varphi) \varphi (\text{Cos} n_i \varphi + L_i \text{Sinn}_i \varphi) d\varphi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi^2 (\text{Cos} n_i \varphi + k_i \text{Sinn}_i \varphi)^2 d\varphi - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi (\text{Cos} n_i \varphi + L_i \text{Sinn}_i \varphi) (\text{Cos} n_i \varphi + k_i \text{Sinn}_i \varphi) d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (\text{Cos} n_i \varphi + k_i \text{Sinn}_i \varphi)^2 d\varphi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi^2 (\text{Cos} n_i \varphi + L_i \text{Sinn}_i \varphi)^2 d\varphi - \left[\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi (\text{Cos} n_i \varphi + L_i \text{Sinn}_i \varphi) (\text{Cos} n_i \varphi + k_i \text{Sinn}_i \varphi) d\varphi \right]^2}$$

$$C_i = \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(\varphi) \varphi (\text{Cos} n_i \varphi + L_i \text{Sinn}_i \varphi) d\varphi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (\text{Cos} n_i \varphi + k_i \text{Sinn}_i \varphi)^2 d\varphi - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi (\text{Cos} n_i \varphi + L_i \text{Sinn}_i \varphi) (\text{Cos} n_i \varphi + k_i \text{Sinn}_i \varphi) d\varphi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(\varphi) (\text{Cos} n_i \varphi + k_i \text{Sinn}_i \varphi) d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (\text{Cos} n_i \varphi + k_i \text{Sinn}_i \varphi)^2 d\varphi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi^2 (\text{Cos} n_i \varphi + L_i \text{Sinn}_i \varphi)^2 d\varphi - \left[\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi (\text{Cos} n_i \varphi + L_i \text{Sinn}_i \varphi) (\text{Cos} n_i \varphi + k_i \text{Sinn}_i \varphi) d\varphi \right]^2}$$

$$B_i = k_i A_i; \quad d_i = L_i C_i$$

где

$$k_i = - \frac{(\varphi_2 - \varphi_1) \text{Cos} n_i \varphi_1 \text{Cos} n_i \varphi_2 - L_i \varphi_1 \text{Sinn}_i \varphi_1 \text{Cos} n_i \varphi_2 + L_i \varphi_2 \text{Cos} n_i \varphi_1 \text{Sinn}_i \varphi_2}{\varphi_2 L_i \text{Sinn}_i \varphi_1 \text{Sinn}_i \varphi_2 + \varphi_2 \text{Sinn}_i \varphi_1 \text{Cos} n_i \varphi_2 - \varphi_1 \text{Cos} n_i \varphi_1 \text{Sinn}_i \varphi_2},$$

а L_i является корнем некоторого алгебраического уравнения четвёртой степени.

В связи с тем, что каждая из фундаментальных функций $f_{2,i}$ содержит четыре произвольных постоянных (а не две как, например, в случае разложения $F(\varphi)$ в ряд Фурье), то представляется возможным, как правило, вне зависимости от принятого числа членов в разложении (2.9) точно удовлетворить значениям функции $F(\varphi)$ на границах рассматриваемого интервала.

Указанное обстоятельство не всегда может быть выполнено при разложении $F(\varphi)$ в ряд Фурье.

С целью упрощения доказательства теоремы в определении приняты нулевые граничные условия. Однако эта теорема, как и последующая, может быть доказана для ряда более общих граничных условий. При этом рассуждения в доказательствах не будут иметь никаких принципиальных отличий от приведённых выше.

Рассмотрим ряд

$$F^*(\varphi) = \sum_{i=1}^M [A_i (\text{Cos} n_i \varphi + k_i \text{Sinn}_i \varphi) + C_i \varphi (\text{Cos} n_i \varphi + L_i \text{Sinn}_i \varphi)], \quad (2.10)$$

в котором $B_i = k_i A_i$, а $d_i = L_i C_i$. Функции, составляющие этот ряд, ограничены и интегрируемы каждая по себе в интервале (φ_1, φ_2) . Поэтому $F^*(\varphi)$, а, следовательно, и $F(\varphi) - F^*(\varphi)$ (здесь предполагается сначала, что $F(\varphi)$ - непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая сформулированным в определении теоремы граничным условиям) можно рассматривать как функции с интегрируемым квадратом. Составим интеграл

$$\delta_i = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} [F(\varphi) - F^*(\varphi)]^2 d\varphi, \quad (2.11)$$

характеризующий среднеквадратичную ошибку приближения $F^*(\varphi)$ к $F(\varphi)$ в интервале (φ_1, φ_2) . Величину δ_i можно рассматривать как функцию от коэффициентов A_i и C_i и наилучшее приближение $F^*(\varphi)$ к $F(\varphi)$ получится тогда, когда эти коэффициенты будут выбираться из условий

$$\frac{\partial \delta_i}{\partial A_i} = \dots = \frac{\partial \delta_i}{\partial C_i} = \dots = 0.$$

Дифференцируем δ_i по A_i

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \{F(\varphi) - \sum_{i=1}^M [A_i(\text{Cos} n_i \varphi + k_i \text{Sin} n_i \varphi) + C_i \varphi(\text{Cos} n_i \varphi + L_i \text{Sin} n_i \varphi)]\} (\text{Cos} n_i \varphi + k_i \text{Sin} n_i \varphi) d\varphi = 0$$

И затем по C_i

(2.12)

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \{F(\varphi) - \sum_{i=1}^M [A_i(\text{Cos} n_i \varphi + k_i \text{Sin} n_i \varphi) + C_i \varphi(\text{Cos} n_i \varphi + L_i \text{Sin} n_i \varphi)]\} (\text{Cos} n_i \varphi + L_i \text{Sin} n_i \varphi) d\varphi = 0.$$

Принимая во внимание следствие теоремы 1 и решая совместно полученные уравнения относительно A_i и C_i , находим

$$\left. \begin{aligned} A_i &= \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(\varphi)(\text{Cos} n_i \varphi + k_i \text{Sin} n_i \varphi) d\varphi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi^2 (\text{Cos} n_i \varphi + L_i \text{Sin} n_i \varphi)^2 d\varphi - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(\varphi) \varphi (\text{Cos} n_i \varphi + L_i \text{Sin} n_i \varphi) d\varphi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (\text{Cos} n_i \varphi + k_i \text{Sin} n_i \varphi)^2 d\varphi -}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (\text{Cos} n_i \varphi + k_i \text{Sin} n_i \varphi)^2 d\varphi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi^2 (\text{Cos} n_i \varphi + L_i \text{Sin} n_i \varphi)^2 d\varphi -} \\ &\quad \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi (\text{Cos} n_i \varphi + L_i \text{Sin} n_i \varphi) (\text{Cos} n_i \varphi + k_i \text{Sin} n_i \varphi) d\varphi}{\left[\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi (\text{Cos} n_i \varphi + L_i \text{Sin} n_i \varphi) (\text{Cos} n_i \varphi + k_i \text{Sin} n_i \varphi) d\varphi \right]^2} \\ C_i &= \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(\varphi) \varphi (\text{Cos} n_i \varphi + L_i \text{Sin} n_i \varphi) d\varphi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (\text{Cos} n_i \varphi + k_i \text{Sin} n_i \varphi)^2 d\varphi - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi (\text{Cos} n_i \varphi + L_i \text{Sin} n_i \varphi) (\text{Cos} n_i \varphi + k_i \text{Sin} n_i \varphi) d\varphi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(\varphi)(\text{Cos} n_i \varphi + k_i \text{Sin} n_i \varphi) d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (\text{Cos} n_i \varphi + k_i \text{Sin} n_i \varphi)^2 d\varphi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi^2 (\text{Cos} n_i \varphi + L_i \text{Sin} n_i \varphi)^2 d\varphi -} \\ &\quad \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi (\text{Cos} n_i \varphi + L_i \text{Sin} n_i \varphi) (\text{Cos} n_i \varphi + k_i \text{Sin} n_i \varphi) d\varphi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(\varphi)(\text{Cos} n_i \varphi + k_i \text{Sin} n_i \varphi) d\varphi}{\left[\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi (\text{Cos} n_i \varphi + L_i \text{Sin} n_i \varphi) (\text{Cos} n_i \varphi + k_i \text{Sin} n_i \varphi) d\varphi \right]^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Легко видеть, что найденные значения A_i и C_i не только соответствуют минимуму δ_i , но и ограничены при $n_i \rightarrow \infty$.

Действительно в точке минимума должно выполняться неравенство

$$\frac{\partial^2 \delta_i}{\partial A_i^2} * \frac{\partial^2 \delta_i}{\partial C_i^2} - \left(\frac{\partial^2 \delta_i}{\partial A_i \partial C_i} \right)^2 > 0.$$

Произведя соответствующие дифференцирования и подставляя результаты в это неравенство, после простых преобразований получаем

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (Cos n_i \varphi + k_i Sin n_i \varphi)^2 d\varphi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (Cos n_i \varphi + L_i Sin n_i \varphi)^2 \varphi^2 d\varphi - \left[\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi (Cos n_i \varphi + k_i Sin n_i \varphi) (Cos n_i \varphi + L_i Sin n_i \varphi) d\varphi \right]^2 > 0$$

при всех n_i не обращающих левую часть неравенства в нуль.

Сравнивая полученное выражение с известным неравенством Буняковского, непосредственно убеждаемся в соответствии (2.13) минимуму δ_i , когда k_i и L_i таковы, что неравенство не обращается в тождество.

Обозначим максимумы функций $F(\varphi)$, φ^2 , $F(\varphi)\varphi$ и φ соответственно как T_1 , T_2 , T_3 и T_4 . Тогда из (2.13)

$$|A_i| \leq \left| \frac{T_1 T_2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (Cos n_i \varphi + k_i Sin n_i \varphi) d\varphi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (Cos n_i \varphi + L_i Sin n_i \varphi)^2 d\varphi - T_2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (Cos n_i \varphi + k_i Sin n_i \varphi)^2 d\varphi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (Cos n_i \varphi + L_i Sin n_i \varphi)^2 d\varphi - T_3 T_4 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (Cos n_i \varphi + L_i Sin n_i \varphi) d\varphi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (Cos n_i \varphi + k_i Sin n_i \varphi) (Cos n_i \varphi + L_i Sin n_i \varphi) d\varphi}{T_4^2 \left[\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (Cos n_i \varphi + k_i Sin n_i \varphi) (Cos n_i \varphi + L_i Sin n_i \varphi) d\varphi \right]^2} \right|$$

Предварительно полагая k_i и L_i ограниченными (в этом мы убедимся в дальнейшем) и, взяв интегралы, стоящие в правой части неравенства, получаем

$$|A_i| \leq \frac{T_1 T_2 \frac{1}{n_i} (-Sin n_i \varphi + L_i Cos n_i \varphi)_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cdot \frac{1}{2} \left\{ (1 + L_i^2) \varphi + \frac{1}{n_i} \left[\frac{1 + L_i^2}{2} Sin 2n_i \varphi - L_i Cos 2n_i \varphi \right] \right\}_{\varphi_1}^{\varphi_2} - T_2 \frac{1}{4} \left\{ (1 + k_i^2) \varphi + \frac{1}{n_i} \left[\frac{1}{2} Sin 2n_i \varphi (1 - k_i^2) - k_i Cos 2n_i \varphi \right] \right\}_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left\{ (1 + L_i^2) \varphi + \frac{1}{n_i} \left[\frac{1}{2} Sin 2n_i \varphi * \right. \right.}{- T_3 T_4 \frac{1}{n_i} (-Sin n_i \varphi + L_i Cos n_i \varphi)_{\varphi_1}^{\varphi_2} - \frac{1}{2} \left\{ (1 + k_i L_i) \varphi + \frac{1}{4n_i} [(1 - k_i L_i) Sin 2n_i \varphi - (k_i + L_i) Cos 2n_i \varphi] \right\}_{\varphi_1}^{\varphi_2} * (1 - L_i^2) - \frac{1}{4} \left\{ (1 + k_i L_i) \varphi + \frac{1}{4n_i} [(1 - k_i L_i) Sin 2n_i \varphi - (k_i + L_i) Cos 2n_i \varphi] \right\}_{\varphi_1}^{\varphi_2}} \quad (2.14)$$

Т.к. при $n_i \rightarrow \infty$ правая часть неравенства стремится к нулю, то $\lim_{n_i \rightarrow \infty} A_i = 0$.

Точно также можно установить, что $\lim_{n_i \rightarrow \infty} C_i = 0$. Если построить ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |A_i|$, то, отбросив члены второго порядка малости, содержащие множитель $\frac{1}{n_i^2}$, придём

как следует из (2.14), к рассмотрению ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[\left| \frac{a \sin n_i \varphi}{n_i} \right| + \left| \frac{b \cos n_i \varphi}{n_i} \right| \right], \quad (2.15)$$

где a и b некоторые постоянные, не зависящие от n_i . Принимая для оценки сходимости этого ряда интегральный признак Коши, находим, что несобственный интеграл

$$\int_{\alpha}^{\infty} \left[\left| \frac{a \sin n_i \varphi}{n_i} \right| + \left| \frac{b \cos n_i \varphi}{n_i} \right| \right] dn_i -$$

есть величина конечная ($\alpha \neq 0$, т.к. $n_i \neq 0$). Поэтому ряд (2.15), а, следовательно,

и ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |A_i|$ является сходящимся. Отсюда непосредственно вытекает, что ряд

$\sum_{i=1}^{\infty} A_i$ и по аналогии ряд $\sum_{i=1}^{\infty} C_i$ - абсолютно сходятся.

Покажем далее, что система функции вида f_2 обладает полнотой и ряд (2.10) сходится к $F(\varphi)$ “в среднем”, т.е. $\lim_{M \rightarrow \infty} \delta_i = 0$, что равносильно $\lim_{n_i \rightarrow \infty} \delta_i = 0$.

Введём обозначения

$$F_M(\varphi) = F(\varphi) - \sum_{i=1}^M [A_i (\cos n_i \varphi + k_i \sin n_i \varphi) + C_i (\cos n_i + L_i \sin n_i) \varphi];$$

$$P_M(\varphi) = F_M(\varphi) / \sqrt{\delta_i}$$

Поставим задачу о нахождении минимума функционала

$$G(P_M) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} [-P_{M(\varphi)}'^2 + n_i^2 P_{M(\varphi)}^2] d\varphi$$

при дополнительном условии

$$H(P_M) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \theta_i P_{M(\varphi)} d\varphi = 1.$$

На основании теоремы Эйлера можно утверждать, что функции, дающие решение поставленной задачи, должны быть экстремалиями функционала [1.3]

$$G(P_M) + 2m_i^2 H(P_M) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} [-P_{M(\varphi)}'^2 + n_i^2 P_{M(\varphi)}^2 + 2m_i^2 \theta_i P_{M(\varphi)}] d\varphi,$$

для которого уравнение Эйлера

$$P''_{M(\varphi)} + n_i^2 P_{M(\varphi)} = -m_i^2 \theta_i$$

в точности совпадает со вторым уравнением (1.6).

Если коэффициенты A_i и C_i выбраны как (2.13), то $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} P_{M(\varphi)} f_{2,i} d\varphi = 0$, где $i = 1, 2, 3, \dots, M$. Т.к. кроме того, граничные условия задачи о собственных значениях и рассматриваемой вариационной задачи также совпадают, то функция $P_{M(\varphi)}$, дающая минимум $G(P_M)$ при условии $H(P_M) = 1$ является фундаментальной. Поэтому, учитывая следствие теоремы 2, а также в силу определения настоящей теоремы в отношении числа n_i , $G(P_M) \geq n_{M+1}^2$. Вычислим $G(P_M)$. Переходя к ранее принятым обозначениям,

$$\begin{aligned} G(P_M) &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} [-P_{M(\varphi)}'^2 + n_i^2 P_{M(\varphi)}^2] d\varphi = \frac{1}{\delta_i} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} [-(F'(\varphi) - \sum_{i=1}^M f_{2,i}')^2 + n_i^2 (F(\varphi) - \\ &- \sum_{i=1}^M f_{2,i})^2] d\varphi = \frac{1}{\delta_i} [G(F\varphi) - 2 \sum_{\varphi_1}^{\varphi_2} G(F\varphi, f_{2,i}) + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M G(f_{2,i}, f_{2,j})] \geq n_{M+1}^2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

На основании теоремы 2 имеем

$$G(F\varphi, f_{2,i}) = n_i^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(\varphi) \theta_i d\varphi; \quad G(f_{2,i}, f_{2,j}) = 0 \quad \text{при } i \neq j.$$

Подставляя эти значения функционалов в (2.16), получаем

$$\frac{1}{\delta_i} \{G(F\varphi) - \sum_{i=1}^M n_i^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} [\theta_i F(\varphi) + \theta_i F(\varphi) - f_{2,i}] d\varphi\} \geq n_{M+1}^2. \quad (2.17)$$

Принимая во внимание теорему 1, из первого уравнения (2.12) после умножения его на A_i имеем

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \theta (F(\varphi) - f_{2,i}) d\varphi = 0, \quad \text{откуда} \quad \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(\varphi) \theta_i d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \theta_i f_{2,i} d\varphi$$

Подставляя найденные значения интегралов в (2.17), находим

$$\delta_i \leq \frac{G(F\varphi) - \sum_{i=1}^M n_i^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \theta_i f_{2,i} d\varphi}{n_{M+1}^2} = \frac{G(F\varphi) - \sum_{i=1}^M G(f_{2,i})}{n_{M+1}^2}. \quad (2.18)$$

Учитывая теорему 3, а также то, что при достаточно большом i можно подобрать также достаточно большое n_i , допустимо считать с некоторого i $G(F\varphi) > 0$ и $G(f_{2,i}) > 0$.

Принимая во внимание, что при любом сколь угодно большом наперёд заданном значении n_i , не зависящем от M , $G(F\varphi)$ остаётся конечным, можно считать также числитель правой части (2.18) ограниченным, ибо в противном случае $\delta_i < 0$, что невозможно по построению δ_i .

Т.к. при $M \rightarrow \infty$ $n_M \rightarrow \infty$, то отсюда следует, что $\delta_i \rightarrow 0$ при $M \rightarrow \infty$. Т.о. ряд (2.10) сходится в среднем к $F(\varphi)$.

Умножая обе части ряда (2.9) отдельно на $A_i \cos n_i \varphi + B_i \sin n_i \varphi$, а затем на $\varphi(C_j \cos n_j \varphi + d_j \sin n_j \varphi)$ и интегрируя (по доказанному система рассматриваемых функций обладает полнотой) их по промежутку (φ_1, φ_2) , после преобразований с учётом теоремы 1 и её следствия получаем

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(\varphi)(\cos n_i \varphi + k_i \sin n_i \varphi) d\varphi &= A_i \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (\cos n_i \varphi + k_i \sin n_i \varphi)^2 d\varphi + C_i \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi (\cos n_i \varphi + \\ &+ L_i \sin n_i \varphi)(\cos n_i \varphi + k_i \sin n_i \varphi) d\varphi; \\ \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(\varphi)(\cos n_i \varphi + L_i \sin n_i \varphi) d\varphi &= A_i \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi (\cos n_i \varphi + L_i \sin n_i \varphi)(\cos n_i \varphi + k_i \sin n_i \varphi) d\varphi + \\ &+ C_i \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi^2 (\cos n_i \varphi + L_i \sin n_i \varphi)^2 d\varphi. \end{aligned}$$

Решая эти уравнения совместно относительно A_i и C_i , находим их значения, которые в точности совпадают с (2.13). Полученный результат говорит о том, что если в рассматриваемом ряде отбросить бесконечное число членов, следующих за n -ым, то оставшаяся конечная сумма даст приближение $F(\varphi)$ наилучшее из возможных с помощью рассмотренных рядов с таким же числом членов. Более того коэффициенты (2.13), найденные для, $i = M$, остаются неизменными при увеличении числа членов ряда (2.9).

Чтобы освободиться от ранее принятого ограничения неопределённой дифференцируемости функции $F(\varphi)$, достаточно вспомнить, что для всякой достаточно гладкой функции $F(\varphi)$, существует непрерывно дифференцируемая функция $f(\varphi)$, удовлетворяющая нулевым граничным условиям и такая, что

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} [F(\varphi) - f(\varphi)]^2 d\varphi < \varepsilon,$$

где ε - любое заданное положительное число.

Покажем далее, что ряд (2.9) сходится к $F(\varphi)$ равномерно. При этом достаточно показать, что ряд (2.9) вообще равномерно сходится. Действительно, так как этот ряд сходится “в среднем” к $F(\varphi)$, то, сходясь равномерно, он не может иметь своим пределом никакую другую функцию.

Как было показано ранее, ряды $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$ и $\sum_{i=1}^{\infty} C_i$, а, следовательно, и ряд

$\sum_{i=1}^{\infty} (A_i + C_i)$ являются абсолютно сходящимися. Согласно ранее сделанному предположению k_i и L_i - величины суть ограниченные, поэтому функции $(\cos n_i \varphi + k_i \sin n_i \varphi)$ и $\varphi(\cos n_i \varphi + L_i \sin n_i \varphi)$ в области G также ограничены. Обозначим их максимальные значения в этой области соответственно через M_1 и M_2 и составим новый ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} (A_i M_1 + C_i M_2). \quad (2.19)$$

Ряд (2.19) по признаку Абеля [4] является сходящимся. Сравнивая члены ряда (2.9) с соответствующими членами мажорантного ряда (2.19) имеем

$$\begin{aligned} |A_i M_1| &\geq |A_i (\cos n_i \varphi + k_i \sin n_i \varphi)|; \\ |C_i M_2| &\geq |C_i \varphi (\cos n_i \varphi + L_i \sin n_i \varphi)|. \end{aligned}$$

Т. о., в соответствии с теоремой Вейерштрасса [4] ряд (2.9) сходится в рассматриваемом интервале абсолютно и равномерно.

Осталось показать, что коэффициенты k_i и L_i действительно ограничены.

Для их определения воспользуемся граничными условиями нашей задачи.

Подставляя в них (2.9) для каждого значка i будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} A_i (\cos n_i \varphi_1 + k_i \sin n_i \varphi_1) + C_i \varphi_1 (\cos n_i \varphi_1 + L_i \sin n_i \varphi_1) &= 0 \\ A_i (\cos n_i \varphi_2 + k_i \sin n_i \varphi_2) + C_i \varphi_2 (\cos n_i \varphi_2 + L_i \sin n_i \varphi_2) &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Для того, чтобы эта система имела решение отличное от нулевого необходимо и достаточно, чтобы её определитель равнялся нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} \cos n_i \varphi_1 + k_i \sin n_i \varphi_1; & \varphi_1 (\cos n_i \varphi_1 + L_i \sin n_i \varphi_1) \\ \cos n_i \varphi_2 + k_i \sin n_i \varphi_2; & \varphi_2 (\cos n_i \varphi_2 + L_i \sin n_i \varphi_2) \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель после преобразований получаем:

$$k_i = \frac{(\varphi_2 - \varphi_1) \cos n_i \varphi_1 \cos n_i \varphi_2 - L_i \varphi_1 \sin n_i \varphi_1 \cos n_i \varphi_2 + L_i \varphi_2 \cos n_i \varphi_1 \sin n_i \varphi_2}{\varphi_2 L_i \sin n_i \varphi_1 \sin n_i \varphi_2 + \varphi_2 \sin n_i \varphi_1 \cos n_i \varphi_2 - \varphi_1 \cos n_i \varphi_1 \sin n_i \varphi_2}.$$

С другой стороны, подставляя значения A_i и C_i из (2.13) и k_i из последнего выражения, например, в первое уравнение системы, приходим к алгебраическому уравнению четвертой степени относительно L_i , из которого этот коэффициент и определяется.

Т.к. все коэффициенты названного уравнения четвертой степени относительно L_i (последнее не приводится из-за громоздкости) имеют конечную величину при всех n_i , а знаменатель выражения для k_i не обращается в нуль ни при каком значении n_i , то при неограниченном возрастании n_i коэффициенты k_i и L_i должны оставаться ограниченными. Оставшиеся неизвестными коэффициенты ряда (2.9) определяются как $B_i = k_i A_i$; $d_i = L_i C_i$. Следует отметить, что коэффициенты B_i и d_i могут быть определены также как A_i и C_i непосредственно из условий

$$\frac{\partial \delta_i}{\partial B_i} = \dots = \frac{\partial \delta_i}{\partial d_i} = \dots = 0,$$

а не из граничных условий, как это было сделано выше. В этом случае, однако, значение разложения (2.9) и значение функции $F(\varphi)$ на границах, вообще говоря, могут точно и не совпадать. По-видимому, этот фактор особенно будет важен, при рассмотрении вопросов устойчивости решений, представленных асимптотическими выражениями. Т.о. теорема доказана.

Следствие: Для определенного разложения функции $F(\varphi)$ в ряд (2.9) необходимо и достаточно, чтобы на границах интервала были заданы её значения. Если не требовать от (2.9) точного удовлетворения граничным условиям $F(\varphi)$, то k_i и L_i остаются произвольными. При наличии определенных свойств у функции $F(\varphi)$ последняя (по аналогии с рядами Фурье) может быть разложена в ряд либо только по синусам, либо только по косинусам.

§ 3 Обоснование нового метода разделения переменных

Рассмотрим уравнение (1.1). Будем искать дважды непрерывно дифференцируемое в области G решение этого уравнения, удовлетворяющее граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{\zeta=R_1} &= F_1(\varphi); & \Phi_{\zeta=R_2} &= F_2(\varphi) \\ \Phi_{\varphi=\varphi_1} &= 0; & \Phi_{\varphi=\varphi_2} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (3.1)$$

Здесь $F_1(\varphi)$ и $F_2(\varphi)$; некоторые произвольные, имеющие непрерывные вторые производные функции, обращающиеся в нуль на своих границах.

Новый метод, разделения переменных приводит к рассмотрению ряда (1.10), где функции Φ_i являются фундаментальными функциями уравнения (1.1).

Теорема 5

Функция $\Phi(r, \varphi)$, определяется рядом (1.10), имеет непрерывные производные второго порядка и удовлетворяет в G уравнению (1.1) и граничным условиям (3.1). При этом ряд (1.10) в G сходится абсолютно и равномерно.

Преобразуем (1.10) к виду

$$\begin{aligned} \Phi = & \sum_{i=1}^{\infty} \{ [(C_{1,i}r^{n_i} + C_{2,i}r^{-n_i})C_{3,i} + (C_{5,i}r^{n_i} + C_{6,i}r^{-n_i})\ln r C_{7,i}] [\cos n_i \varphi + \\ & + \frac{(C_{1,i}r^{n_i} + C_{2,i}r^{-n_i})C_{4,i} + (C_{5,i}r^{n_i} + C_{6,i}r^{-n_i})\ln r C_{8,i}}{(C_{1,i}r^{n_i} + C_{2,i}r^{-n_i})C_{3,i} + (C_{5,i}r^{n_i} + C_{6,i}r^{-n_i})\ln r C_{7,i}} \sin n_i \varphi] + C_{8,i}(-C_{5,i}r^{n_i} + \\ & + C_{6,i}r^{-n_i})\varphi (\cos n_i \varphi - \frac{C_{7,i}}{C_{8,i}} \sin n_i \varphi) \} \end{aligned} \quad (3.2)$$

и подставим его в первое граничное условие (3.1). С учётом следствия теоремы 4 предыдущего параграфа получаем при $r = R_1$

$$\left. \begin{aligned}
& (C_{1,i}R_1^{n_i} + C_{2,i}R_1^{-n_i})C_{3,i} + (C_{5,i}R_1^{n_i} + C_{6,i}R_1^{-n_i})\ln R_1 C_{7,i} = A_i \\
& C_{8,i}(-C_{5,i}R_1^{n_i} + C_{6,i}R_1^{-n_i}) = C_i \\
& \frac{(C_{1,i}R_1^{n_i} + C_{2,i}R_1^{-n_i})C_{4,i} + (C_{5,i}R_1^{n_i} + C_{6,i}R_1^{-n_i})\ln R_1 C_{8,i}}{(C_{1,i}R_1^{n_i} + C_{2,i}R_1^{-n_i})C_{3,i} + (C_{5,i}R_1^{n_i} + C_{6,i}R_1^{-n_i})\ln R_1 C_{7,i}} = k_i \\
& -\frac{C_{7,i}}{C_{8,i}} = L_i \\
& \frac{(C_{1,i}R_2^{n_i} + C_{2,i}R_2^{-n_i})C_{4,i} + (C_{5,i}R_2^{n_i} + C_{6,i}R_2^{-n_i})\ln R_2 C_{8,i}}{(C_{1,i}R_2^{n_i} + C_{2,i}R_2^{-n_i})C_{3,i} + (C_{5,i}R_2^{n_i} + C_{6,i}R_2^{-n_i})\ln R_2 C_{7,i}} = k_i^* \\
& -\frac{C_{7,i}}{C_{8,i}} = L_i^*
\end{aligned} \right\}. \quad (3.3)$$

Здесь A_i, C_i, A_i^* и C_i^* соответственно коэффициенты рядов разложения функций $F_1(\varphi)$ и $F_2(\varphi)$, определяемые по формулам (2.13), в которых k_i, L_i и k_i^*, L_i^* остаются пока произвольными.

Преобразуя далее (1.10) к виду

$$\begin{aligned}
\Phi = & \sum_{i=1}^{\infty} \{ [(C_{3,i}\cos n_i\varphi + C_{4,i}\sin n_i\varphi)C_{1,i} - (C_{8,i}\cos n_i\varphi - C_{7,i}\sin n_i\varphi)\varphi C_{5,i}]r^{n_i} + \\
& + [(C_{3,i}\cos n_i\varphi + C_{4,i}\sin n_i\varphi)C_{2,i} + (C_{8,i}\cos n_i\varphi - C_{7,i}\sin n_i\varphi)\varphi C_{6,i}]r^{-n_i} + \\
& + C_{5,i}(C_{7,i}\cos n_i\varphi + C_{8,i}\sin n_i\varphi)\ln r \left(r^{n_i} + \frac{C_{6,i}}{C_{5,i}}r^{-n_i} \right) \}
\end{aligned} \quad (3.4)$$

и подставляя его во второе граничное условие (3.1) при $\varphi = \varphi_1$

$$\left. \begin{aligned}
& (C_{3,i}\cos n_i\varphi_1 + C_{4,i}\sin n_i\varphi_1)C_{1,i} - (C_{8,i}\cos n_i\varphi_1 - C_{7,i}\sin n_i\varphi_1)\varphi_1 C_{5,i} = 0 \\
& C_{5,i}(C_{7,i}\cos n_i\varphi_1 + C_{8,i}\sin n_i\varphi_1) = 0 \\
& (C_{3,i}\cos n_i\varphi_1 + C_{4,i}\sin n_i\varphi_1)C_{2,i} + (C_{8,i}\cos n_i\varphi_1 - C_{7,i}\sin n_i\varphi_1)\varphi_1 C_{6,i} = 0 \\
& \text{при } \varphi = \varphi_2 \\
& (C_{3,i}\cos n_i\varphi_2 + C_{4,i}\sin n_i\varphi_2)C_{1,i} - (C_{8,i}\cos n_i\varphi_2 - C_{7,i}\sin n_i\varphi_2)\varphi_2 C_{5,i} = 0 \\
& C_{5,i}(C_{7,i}\cos n_i\varphi_2 + C_{8,i}\sin n_i\varphi_2) = 0 \\
& (C_{3,i}\cos n_i\varphi_2 + C_{4,i}\sin n_i\varphi_2)C_{2,i} + (C_{8,i}\cos n_i\varphi_2 - C_{7,i}\sin n_i\varphi_2)\varphi_2 C_{6,i} = 0
\end{aligned} \right\}. \quad (3.5)$$

Т.о. имеем четырнадцать уравнений (3.3) и (3.5) для определения коэффициентов $C_{1,i} \div C_{8,i}$, параметра n_i , а также величин k_i, L_i, k_i^*, L_i^* . Полученное несоответствие между числом неизвестных и числом уравнений, из которых они могут быть определены, как будет видно в дальнейшем, только кажущееся. На самом деле независимых уравнений ровно столько, сколько необходимо для однозначности решения (1.10).

Предположим предварительно, что ни один из коэффициентов $C_{1,i} \div C_{8,i}$ не равен нулю.

Из четвёртого и восьмого соотношений (3.3) следует

$$L_i = L_i^* . \quad (3.6)$$

Далее второе и шестое соотношения (3.3) дают

$$\left. \begin{aligned} C_{5,i} &= \frac{C_i R_2^{-n_i} - C_i^* R_1^{-n_i}}{C_{8,i} (R_1^{-n_i} R_2^{n_i} - R_2^{-n_i} R_1^{n_i})} \\ C_{6,i} &= \frac{C_i R_2^{n_i} - C_i^* R_1^{-n_i}}{C_{8,i} (R_1^{-n_i} R_2^{n_i} - R_2^{-n_i} R_1^{n_i})} \\ \frac{C_{5,i}}{C_{6,i}} &= \frac{C_i R_2^{-n_i} - C_i^* R_1^{-n_i}}{C_i R_2^{n_i} - C_i^* R_1^{n_i}} \end{aligned} \right\} , \quad (3.7)$$

а второе соотношения (3.5) и пятое (3.5)

$$\frac{C_{7,i}}{C_{8,i}} = -\operatorname{tg} n_i \varphi_1 = -\operatorname{tg} n_i \varphi_2 \quad (3.8)$$

и

$$\operatorname{Sinn}_i(\varphi_2 - \varphi_1) = 0 , \quad (3.9)$$

откуда

$$n_i = \frac{\pi \rho}{\varphi_2 - \varphi_1} , \text{ где } \rho = 1, 2, 3, \dots$$

Решая совместно первое и третье соотношения (3.5), находим

$$\frac{C_{1,i}}{C_{2,i}} = -\frac{C_{5,i}}{C_{6,i}} , \quad \text{а} \quad \frac{C_{1,i}}{C_{5,i}} = \frac{\varphi_1 \operatorname{Cos} n_i (\varphi_2 - \varphi_1) C_{8,i}}{\operatorname{Cos} n_i \varphi_2 (C_{3,i} \operatorname{Cos} n_i \varphi_1 + C_{4,i} \operatorname{Cos} n_i \varphi_1)} ;$$

Точно также из четвёртого и шестого соотношения (3.5)

$$\frac{C_{1,i}}{C_{5,i}} = \frac{\varphi_2 \operatorname{Cos} n_i (\varphi_2 - \varphi_1) C_{8,i}}{\operatorname{Cos} n_i \varphi_1 (C_{3,i} \operatorname{Cos} n_i \varphi_2 + C_{4,i} \operatorname{Cos} n_i \varphi_2)} ;$$

Приравнивая правые части двух последних выражений, после преобразований имеем

$$\frac{C_{3,i}}{C_{4,i}} = -\operatorname{tg} n_i \varphi_1 = -\operatorname{tg} n_i \varphi_2 = \frac{C_{7,i}}{C_{8,i}} \quad (3.10)$$

Решаем далее первое и третье уравнения (3.3). Используя (3.7) и (3.10), после преобразований имеем

$$k_i = \frac{1}{L_i} \quad (3.11)$$

и

$$C_{1,i} C_{3,i} = \frac{A_i (C_i R_2^{-n_i} - C_i^* R_1^{-n_i}) - L_i \ln R_1 \frac{(C_i R_2^{-n_i} - C_i^* R_1^{-n_i}) [C_i (R_1^{n_i} R_2^{-n_i} + R_2^{n_i} R_1^{n_i}) - 2C_i^*]}{R_1^{-n_i} R_2^{n_i} - R_2^{-n_i} R_1^{n_i}}}{C_i (R_1^{n_i} R_2^{-n_i} - R_2^{n_i} R_1^{-n_i})}$$

Наконец, решая совместно пятое и седьмое соотношения (3.3), после подстановки в них (3.7) и (3.10) и простых преобразований, находим

$$k_i^* = \frac{1}{L_i^*} \quad (3.12)$$

и

$$C_{1,i}C_{3,i} = \frac{A_i^*(C_i R_2^{-n_i} - C_i^* R_1^{-n_i}) - L_i^* \ln R_2 \frac{(C_i R_2^{-n_i} - C_i^* R_1^{-n_i})[2C_i - C_i^*(R_2^{n_i} R_1^{-n_i} + R_2^{-n_i} R_1^{n_i})]}{R_1^{-n_i} R_2^{n_i} - R_2^{-n_i} R_1^{n_i}}}{C_i^*(R_1^{n_i} R_2^{-n_i} - R_2^{n_i} R_1^{-n_i})}.$$

Приравнивая правые части найденных выражений для $C_{1,i}C_{3,i}$ с учётом (3.6), (3.11) и (3.12), получаем алгебраическое уравнение пятой степени относительно L_i . В неразвёрнутом виде оно запишется как

$$(A_i C_i^* - A_i^* C_i)(R_1^{-n_i} R_2^{n_i} - R_2^{-n_i} R_1^{n_i}) + L_i \{ \ln R_2 C_i [2C_i - C_i^*(R_2^{n_i} R_1^{-n_i} + R_2^{-n_i} R_1^{n_i})] - \\ - \ln R_1 C_i^* [C_i(R_1^{n_i} R_2^{-n_i} + R_2^{n_i} R_1^{-n_i}) - 2C_i^*] \} = 0 \quad (3.13)$$

которое всегда имеет, по крайней мере, один действительный корень L_i .

Подставляя все найденные значения коэффициентов, например, в (3.4), легко видеть, что получившееся выражение не только удовлетворяет уравнению (1.1), но и граничным условиям (3.1). Учитывая, что гармоническая в целом функция (3.4) не может принимать больших (меньших) значений, чем на границе рассматриваемой области, (т.е. она ограничена) можно сделать вывод, что ряд (3.4) сходится в G равномерно.

Рассмотренная на примере интегрирования уравнения Лапласа в полярных координатах общая схема нового метода разделения переменных, может быть распространена на случай многих переменных, а также на уравнения более высокого порядка. Кроме того этот метод применим для большого числа уравнений гиперболического и параболического типов, что, по-видимому, позволит дать точное решение ряда новых задач.

Выводы

Новый метод разделения переменных при интегрировании линейных дифференциальных уравнений в частных производных позволяет:

1. Получить новые виды интегралов этих уравнений, с помощью которых, по-видимому, можно будет найти решения более широкого круга задач математической физики.

2. Показать, что существовавшее мнение о числе независимых постоянных в частных интегралах уравнений, равном произведению порядка уравнения на количество независимых переменных, является не точным. На самом деле их должно быть удвоенное количество.

3. Показать, что метод Фурье разделения переменных является частным случаем более общего, нового метода и что последний применим, по крайней мере, везде, где может быть применен метод Фурье.

4. Получить ряды нового вида, состоящие из гармоничных и квази-гармоничных функций и отличающиеся от всех существующих видов рядов тем, что ими может быть представлена всякая произвольная достаточно гладкая функция одной или нескольких независимых переменных, отвечающая

условиям Дирихле. При этом ряды точно удовлетворяют достаточно общим граничным условиям этих функций вне зависимости от числа взятых при разложении членов ряда. Новые ряды позволяют построить аналитическое продолжение функции за пределами области её исследования, в то время как, например, ряды Фурье при таком продолжении дают лишь её периодическое повторение.

5. С помощью рядов, содержащих гармонические и псевдогармонические члены, получить новые результаты по исследованию устойчивости асимптотических представлений интегралов линейных дифференциальных уравнений, поскольку погрешность указанного асимптотического представления функции на границах интервала отсутствует.

Список литературы

1. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: ГИТТЛ, 1953.
2. Абель В.В. Об интегрировании гармонического и бигармонического уравнений в криволинейных координатах.//Инженерный журнал. Т.3, вып. 1, 1963.
3. Смирнов В.И. Курс высшей математики. - М.: ГИТТЛ, 1957.
4. Фихтенгольц Г.И. Курс дифференциального и интегрального исчисления. - М.: ГИТТЛ 1948.
5. Лауфер М.Я. Обобщённый метод разделения переменных в приложении к одномерной краевой задаче для волнового уравнения. ДР-3388.//Сборник рефератов ДР – М.: ВИМИ, вып. 11, 1991.

ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ В ПРИЛОЖЕНИИ К ОДНОМЕРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

В работе предлагается обобщение метода Фурье разделения переменных для решения линейных дифференциальных уравнений в частных производных от n независимых переменных.

Суть этого обобщения заключается в том, что решение уравнения находится как сумма произвольного числа произведений n неизвестных функций, каждая из которых зависит от одной переменной. При этом, в отличие от метода Фурье, на слагаемые не налагается условие, чтобы они по отдельности удовлетворяли рассматриваемому уравнению или определенности одной из функций в каждом слагаемом.

С помощью обобщенного метода может быть построено бесчисленное множество полных систем ортогональных функций (в частности и система, получаемая методом Фурье), с применением которых могут решаться краевые задачи.

В качестве примера решена одномерная краевая задача для волнового уравнения. Получено решение, отличающееся от существующих. Из него следует, что имеют место электромагнитные волны, у которых при движении в вакууме амплитудно-частотные характеристики изменяются во времени и пространстве.

1. Описание нового метода разделений переменных

Для решения задач математической физики во многих случаях применим метод Фурье разделения переменных. Он заключается в том, что решение дифференциального уравнения в частных производных (или в дальнейшем для краткости - просто уравнения) от n независимых переменных находится в виде произведения n функций, зависящих только от одной из переменных, или суммы некоторого числа этих произведений. В последнем случае на слагаемые налагается условие, чтобы каждое из них удовлетворяло рассматриваемому уравнению.

Не останавливаясь на подробном рассмотрении метода Фурье, ввиду его известности, отметим следующее.

Существует возможность обобщения этого метода, которое заключается в том, что на решение уравнения от n независимых переменных, которое находится как произвольное число слагаемых, являющихся, в свою очередь, произведением n неизвестных функций, зависящих только от одной переменной, как и в [1], не налагается условие, чтобы по отдельности эти слагаемые являлись решениями рассматриваемого уравнения, но в отличие от [1] не налагается и условие определенности одной из функций в каждом слагаемом, зависящей от какой-либо одной переменной. Предлагаемый метод, так же как и метод Фурье, даёт возможность разделить переменные в уравнении. Найденные при этом интегралы, ввиду отброшенных ограничений,

являются более общими, чем интегралы, полученные методом Фурье и содержат последние в качестве некоторого частного случая.

В качестве примера решим уравнение

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial x_2^2}, \quad (1.1)$$

где $x_1 = ct$; $x_2 = x$; E - напряженность электрического поля; c - скорость света в вакууме; t - время; x - расстояние.

Рассмотрим наиболее простой случай, когда частное решение находится в виде суммы только двух слагаемых, т.е.

$$E = X_{1,1}(x_1)X_{1,2}(x_2) + X_{2,1}(x_1)X_{2,2}(x_2). \quad (1.2)$$

На слагаемые (1.2) не налагается условие, чтобы каждое из них удовлетворяло уравнению (1.1) (как это имеет место по методу Фурье).

$X_{1,1}(x_1)$, $X_{1,2}(x_2)$, $X_{2,1}(x_1)$ и $X_{2,2}(x_2)$, обозначаемые в дальнейшем, как $X_{1,1}$, $X_{1,2}$, $X_{2,1}$, и $X_{2,2}$ функции, зависящие соответственно от одной переменной x_1 или x_2 .

Здесь и в дальнейшем первая цифра индексации X обозначает порядковый, номер функции. Вторая цифра указывает переменную, от которой зависит эта функция. Подставляя (1.2) в (1.1), после простых преобразований имеем:

$$\left(\frac{X''_{1,1}}{X_{1,1}} - \frac{X''_{1,2}}{X_{1,2}} \right) * \frac{X_{1,1}}{X_{2,1}} = \left(-\frac{X''_{2,1}}{X_{2,1}} + \frac{X''_{2,2}}{X_{2,2}} \right) * \frac{X_{2,2}}{X_{1,2}}. \quad (1,3)$$

Полагаем

$$\frac{X''_{1,2}}{X_{1,2}} = -n_1^2, \quad \frac{X''_{2,1}}{X_{2,1}} = -n_2^2, \quad (1.4)$$

где n_1 и n_2 - некоторые постоянные. Если положить

$$\frac{X''_{1,2}}{X_{1,2}} = \varphi_1, \quad \frac{X''_{2,1}}{X_{2,1}} = \varphi_2,$$

где φ_1 и φ_2 - произвольные функции, зависящие, соответственно, от x_1 и x_2 , то решение уравнения (1.1) сводится к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка в общем виде, которое пока не может быть выполнено [2]. Исследование решений применительно к частным видам функций. φ_1 и φ_2 , для которых упомянутые уравнения могут быть проинтегрированы в конечном виде, или к комбинации этих функций и постоянных, не входит в программу данной статьи. Знак "-" у постоянных n принят в связи с тем, что при противоположном знаке не удовлетворяются краевые условия ниже рассмотренной физической задачи.

Левая часть равенства (1.3) при условии (1.4) зависит только от x_1 и не зависит от x_2 , а правая - наоборот. Следовательно, каждая из них не зависит ни от x_1 ни от x_2 , т.е. они постоянны. Обозначим эту постоянную через m . Тогда

$$\left(\frac{X''_{1,1}}{X_{1,1}} + n_1^2 \right) * \frac{X_{1,1}}{X_{2,1}} = m, \quad \left(\frac{X''_{2,2}}{X_{2,2}} + n_2^2 \right) * \frac{X_{2,2}}{X_{1,2}} = m. \quad (1.5)$$

Таким образом переменные разделились. После подстановки результатов, интегрирования (1.4) и (1.5) в (1.2) и возвращения к переменным t и x , получаем решение уравнения (1.1) в виде:

$$\begin{aligned} E = \sum_{i=1}^{\infty} & [(a_{1,i} \text{Cos} n_i c t + a_{2,i} \text{Sinn}_i c t)(b_{1,i} \text{Cos} n_i x + b_{2,i} \text{Sinn}_i x) + \\ & + (a_{4,i} \text{Cos} n_i c t - a_{3,i} \text{Sinn}_i c t) c t (b_{3,i} \text{Cos} n_i x + b_{4,i} \text{Sinn}_i x) + \\ & + (a_{3,i} \text{Cos} n_i c t + a_{4,i} \text{Sinn}_i c t) x (b_{4,i} \text{Cos} n_i x - b_{3,i} \text{Sinn}_i x), \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $a_{1,i} \div a_{4,i}; b_{1,i} \div b_{4,i}; n_i$ - постоянные интегрирования. При интегрировании. (1.4) и (1.5) было принято $n_1 = n_2 = n_i$. Указанное условие для постоянных n , в подобных же случаях будет соблюдаться и в дальнейшем. Если его не соблюдать то решение уравнения (1.1) будет содержать двойной ряд независимых частотных гармоник по n_1 и n_2 . Поскольку рассмотрение

этого варианта не представляется интересным, он в дальнейшем не детализируется.

Рассмотрим далее случай, когда частное решение уравнение (1.1) находится по предлагаемому методу в виде суммы, например, пяти слагаемых, т.е.

$$E = X_{1,1}X_{1,2} + X_{2,1}X_{2,2} + X_{3,1}X_{3,2} + X_{4,1}X_{4,2} + X_{5,1}X_{5,2}. \quad (1.7)$$

Подставляя (1.7) в (1.1), после преобразований получаем

$$\begin{aligned} & \left(\frac{X''_{1,1}}{X_{1,1}} - \frac{X''_{1,2}}{X_{1,2}} \right) \frac{X_{1,1}}{X_{5,1}} + \left(\frac{X''_{2,1}}{X_{2,1}} - \frac{X''_{2,2}}{X_{2,2}} \right) \frac{X_{2,1}X_{2,2}}{X_{5,1}X_{1,2}} + \left(\frac{X''_{3,1}}{X_{3,1}} - \frac{X''_{3,2}}{X_{3,2}} \right) \frac{X_{3,1}X_{3,2}}{X_{5,1}X_{1,2}} + \\ & + \left(\frac{X''_{4,1}}{X_{4,1}} - \frac{X''_{4,2}}{X_{4,2}} \right) \frac{X_{4,1}X_{4,2}}{X_{5,1}X_{1,2}} + \left(\frac{X''_{5,1}}{X_{5,1}} - \frac{X''_{5,2}}{X_{5,2}} \right) \frac{X_{5,2}}{X_{1,2}} = 0. \end{aligned}$$

Полагаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{X''_{1,2}}{X_{1,2}} &= -n^2 \\ \frac{X''_{5,1}}{X_{5,1}} &= -n^2 \end{aligned} \right\}. \quad (1.8)$$

Прибавим и отнимем во втором, третьем и четвёртом выражениях, стоящих в скобках, по n^2 . Тогда с учётом (1.8) имеем:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{X''_{1,1}}{X_{1,1}} + n^2 \right) \frac{X_{1,1}}{X_{5,1}} + \left(\frac{X''_{2,1}}{X_{2,1}} + n^2 - \frac{X''_{2,2}}{X_{2,2}} - n^2 \right) \frac{X_{2,1}X_{2,2}}{X_{5,1}X_{1,2}} + \left(\frac{X''_{3,1}}{X_{3,1}} + n^2 - \frac{X''_{3,2}}{X_{3,2}} - n^2 \right) * \\ & * \frac{X_{3,1}X_{3,2}}{X_{5,1}X_{1,2}} + \left(\frac{X''_{4,1}}{X_{4,1}} + n^2 - \frac{X''_{4,2}}{X_{4,2}} - n^2 \right) \frac{X_{4,1}X_{4,2}}{X_{5,1}X_{1,2}} - \left(\frac{X''_{5,2}}{X_{5,2}} + n^2 \right) \frac{X_{5,2}}{X_{1,2}} = 0. \end{aligned}$$

Полагая

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{X''_{2,1}}{X_{2,1}} + n^2 \right) \frac{X_{2,1}}{X_{5,1}} &= m \\ \left(\frac{X''_{4,2}}{X_{4,2}} + n^2 \right) \frac{X_{4,2}}{X_{1,2}} &= m \end{aligned} \right\}. \quad (1.9)$$

m - произвольная постоянная, приходим к выражению

$$\begin{aligned} & \left(\frac{X''_{1,1}}{X_{1,1}} + n^2 \right) \frac{X_{1,1}}{X_{5,1}} + m \frac{X_{2,2}}{X_{1,2}} - \left(\frac{X''_{2,2}}{X_{2,2}} + n^2 \right) \frac{X_{2,1}X_{2,2}}{X_{5,1}X_{1,2}} + \left(\frac{X''_{3,1}}{X_{3,1}} + n^2 - \frac{X''_{3,2}}{X_{3,2}} - n^2 \right) * \\ & * \frac{X_{3,1}X_{3,2}}{X_{5,1}X_{1,2}} + m \frac{X_{4,1}}{X_{5,1}} - \left(\frac{X''_{4,1}}{X_{4,1}} + n^2 \right) \frac{X_{4,1}X_{4,2}}{X_{5,1}X_{1,2}} - \left(\frac{X''_{5,2}}{X_{5,2}} + n^2 \right) \frac{X_{5,2}}{X_{1,2}} = 0. \end{aligned}$$

Здесь и далее для упрощения записи принято, что m_j , где $j = 1, 2, 3, \dots$, равно m . Это условие не вносит каких либо ограничений в область дальнейших рассуждений.

Прибавим и отнимем в левой части последнего равенства

$$m \frac{X_{2,1} X_{3,2}}{X_{5,1} X_{1,2}} \text{ и } m \frac{X_{3,1} X_{4,2}}{X_{5,1} X_{1,2}}$$

и примем

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{X''_{3,1}}{X_{3,1}} + n^2 \right) \frac{X_{3,1}}{X_{5,1}} + m \frac{X_{2,1}}{X_{5,1}} &= m \\ \left(\frac{X''_{3,2}}{X_{3,2}} + n^2 \right) \frac{X_{3,2}}{X_{1,2}} + m \frac{X_{4,2}}{X_{1,2}} &= m \end{aligned} \right\}. \quad (1.10)$$

С учётом (1.10) получаем

$$\begin{aligned} &\left(\frac{X''_{1,1}}{X_{1,1}} + n^2 \right) \frac{X_{1,1}}{X_{5,1}} + m \frac{X_{2,2}}{X_{1,2}} - \left(\frac{X''_{2,2}}{X_{2,2}} + n^2 \right) \frac{X_{2,1} X_{2,2}}{X_{5,1} X_{1,2}} + m \frac{X_{3,2}}{X_{1,2}} - m \frac{X_{2,1} X_{3,2}}{X_{5,1} X_{1,2}} + \\ &+ m \frac{X_{3,1}}{X_{5,1}} + m \frac{X_{3,1} X_{4,2}}{X_{5,1} X_{1,2}} + m \frac{X_{4,1}}{X_{5,1}} - \left(\frac{X''_{4,1}}{X_{4,1}} + n^2 \right) \frac{X_{4,1} X_{4,2}}{X_{5,1} X_{1,2}} - \left(\frac{X''_{5,2}}{X_{5,2}} + n^2 \right) \frac{X_{5,2}}{X_{1,2}} = 0. \end{aligned}$$

Прибавим и отнимем в левой части этого равенства $m \frac{X_{2,1} X_{4,2}}{X_{5,1} X_{1,2}}$ и положим

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{X''_{2,2}}{X_{2,2}} + n^2 \right) \frac{X_{2,2}}{X_{1,2}} + m \frac{X_{3,2}}{X_{1,2}} + m \frac{X_{4,2}}{X_{1,2}} &= m \\ \left(\frac{X''_{4,1}}{X_{4,1}} + n^2 \right) \frac{X_{4,1}}{X_{5,1}} - m \frac{X_{3,1}}{X_{5,1}} - m \frac{X_{2,1}}{X_{5,1}} &= m \end{aligned} \right\}. \quad (1.11)$$

После чего имеем

$$\begin{aligned} &\left(\frac{X''_{1,1}}{X_{1,1}} + n^2 \right) \frac{X_{1,1}}{X_{5,1}} - m \frac{X_{2,1}}{X_{5,1}} - m \frac{X_{3,1}}{X_{5,1}} + m \frac{X_{4,1}}{X_{5,1}} = \left(\frac{X''_{5,2}}{X_{5,2}} + n^2 \right) \frac{X_{5,2}}{X_{1,2}} + m \frac{X_{4,2}}{X_{1,2}} - \\ &- m \frac{X_{3,2}}{X_{1,2}} - m \frac{X_{2,2}}{X_{1,2}}. \end{aligned}$$

Левая часть этого равенства не зависит от x_2 , а правая — от x_1 , следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{X''_{1,1}}{X_{1,1}} + n^2 \right) \frac{X_{1,1}}{X_{5,1}} - m \frac{X_{2,1}}{X_{5,1}} - m \frac{X_{3,1}}{X_{5,1}} - m \frac{X_{4,1}}{X_{5,1}} &= m \\ \left(\frac{X''_{5,2}}{X_{5,2}} + n^2 \right) \frac{X_{5,2}}{X_{1,2}} + m \frac{X_{4,2}}{X_{1,2}} - m \frac{X_{3,2}}{X_{1,2}} - m \frac{X_{2,2}}{X_{1,2}} &= m \end{aligned} \right\}. \quad (1.12)$$

Таким образом переменные разделены, а уравнения (1.8 ÷ 1.12) могут быть проинтегрированы. После подстановки результатов интегрирования (1.8 ÷ 1.12) в (1.7) и преобразований получаем:

$$\begin{aligned}
E = & (a_{1,n} \text{Cos}nx_1 + a_{2,n} \text{Sinn}x_1)(b_{1,n} \text{Cos}nx_2 + b_{2,n} \text{Sinn}x_2) + \\
& + (a_{3,n} \text{Cos}nx_1 + a_{4,n} \text{Sinn}x_1)x_1(b_{3,n} \text{Cos}nx_2 + b_{4,n} \text{Sinn}x_2) + \\
& + (a_{5,n} \text{Cos}nx_1 + a_{6,n} \text{Sinn}x_1)x_2(b_{5,n} \text{Cos}nx_2 + b_{6,n} \text{Sinn}x_2) + \\
& + (a_{7,n} \text{Cos}nx_1 + a_{8,n} \text{Sinn}x_1)x_1^2(b_{7,n} \text{Cos}nx_2 + b_{8,n} \text{Sinn}x_2) + \\
& + (a_{9,n} \text{Cos}nx_1 + a_{10,n} \text{Sinn}x_1)x_1x_2(b_{9,n} \text{Cos}nx_2 + b_{10,n} \text{Sinn}x_2) + \\
& + (a_{11,n} \text{Cos}nx_1 + a_{12,n} \text{Sinn}x_1)x_2^2(b_{11,n} \text{Cos}nx_2 + b_{12,n} \text{Sinn}x_2) + \\
& + (a_{13,n} \text{Cos}nx_1 + a_{14,n} \text{Sinn}x_1)x_1^3(b_{13,n} \text{Cos}nx_2 + b_{14,n} \text{Sinn}x_2) + \\
& + (a_{15,n} \text{Cos}nx_1 + a_{16,n} \text{Sinn}x_1)x_1^2x_2(b_{15,n} \text{Cos}nx_2 + b_{16,n} \text{Sinn}x_2) + \\
& + (a_{17,n} \text{Cos}nx_1 + a_{18,n} \text{Sinn}x_1)x_1x_2^2(b_{17,n} \text{Cos}nx_2 + b_{18,n} \text{Sinn}x_2) + \\
& + (a_{19,n} \text{Cos}nx_1 + a_{20,n} \text{Sinn}x_1)x_2^3(b_{19,n} \text{Cos}nx_2 + b_{20,n} \text{Sinn}x_2) + \\
& + (a_{21,n} \text{Cos}nx_1 + a_{22,n} \text{Sinn}x_1)x_1^4(b_{21,n} \text{Cos}nx_2 + b_{22,n} \text{Sinn}x_2) + \\
& + (a_{23,n} \text{Cos}nx_1 + a_{24,n} \text{Sinn}x_1)x_1^3x_2(b_{23,n} \text{Cos}nx_2 + b_{24,n} \text{Sinn}x_2) + \\
& + (a_{25,n} \text{Cos}nx_1 + a_{26,n} \text{Sinn}x_1)x_1^2x_2^2(b_{25,n} \text{Cos}nx_2 + b_{26,n} \text{Sinn}x_2) + \\
& + (a_{27,n} \text{Cos}nx_1 + a_{28,n} \text{Sinn}x_1)x_1x_2^3(b_{27,n} \text{Cos}nx_2 + b_{28,n} \text{Sinn}x_2) + \\
& + (a_{29,n} \text{Cos}nx_1 + a_{30,n} \text{Sinn}x_1)x_2^4(b_{29,n} \text{Cos}nx_2 + b_{30,n} \text{Sinn}x_2)
\end{aligned}$$

Где $a_{1,n} \div a_{30,n}$ и $b_{1,n} \div b_{30,n}$ - постоянные интегрирования, удовлетворяющие соотношениям:

$$\left. \begin{aligned}
-na_{3,n}b_{3,n} + a_{8,n}b_{7,n} &= na_{6,n}b_{6,n} + a_{12,n}b_{11,n} \\
na_{4,n}b_{3,n} + a_{7,n}b_{7,n} &= na_{5,n}b_{6,n} + a_{11,n}b_{11,n} \\
-na_{3,n}b_{4,n} + a_{8,n}b_{8,n} &= -na_{6,n}b_{5,n} + a_{12,n}b_{12,n} \\
na_{4,n}b_{4,n} + a_{7,n}b_{8,n} &= -na_{5,n}b_{5,n} + a_{11,n}b_{12,n}
\end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned}
-2na_{7,n}b_{7,n} + 3a_{14,n}b_{13,n} &= na_{10,n}b_{10,n} + a_{18,n}b_{17,n} \\
2na_{8,n}b_{7,n} + 3a_{13,n}b_{13,n} &= na_{9,n}b_{10,n} + a_{17,n}b_{17,n} \\
-2na_{7,n}b_{8,n} + 3a_{14,n}b_{14,n} &= na_{10,n}b_{9,n} + a_{18,n}b_{18,n} \\
2na_{8,n}b_{8,n} + 3a_{13,n}b_{14,n} &= -na_{9,n}b_{9,n} + a_{17,n}b_{18,n}
\end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
-na_{9,n}b_{9,n} + a_{16,n}b_{15,n} &= 2na_{12,n}b_{12,n} + 3a_{20,n}b_{19,n} \\
na_{10,n}b_{9,n} + a_{15,n}b_{15,n} &= 2na_{11,n}b_{12,n} + 3a_{19,n}b_{19,n} \\
-na_{9,n}b_{10,n} + a_{16,n}b_{16,n} &= -2na_{12,n}b_{11,n} + 3a_{20,n}b_{20,n} \\
na_{10,n}b_{10,n} + a_{15,n}b_{16,n} &= -2na_{11,n}b_{11,n} + 3a_{19,n}b_{20,n}
\end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned}
3(-na_{13,n}b_{13,n} + 2a_{22,n}b_{21,n}) &= na_{16,n}b_{16,n} + a_{26,n}b_{25,n} \\
3(na_{14,n}b_{13,n} + 2a_{21,n}b_{21,n}) &= na_{15,n}b_{16,n} + a_{25,n}b_{25,n} \\
3(-na_{13,n}b_{14,n} + 2a_{22,n}b_{22,n}) &= -na_{16,n}b_{15,n} + a_{26,n}b_{26,n} \\
3(na_{14,n}b_{14,n} + 2a_{21,n}b_{22,n}) &= -na_{15,n}b_{15,n} + a_{25,n}b_{26,n}
\end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} -na_{17,n}b_{17,n} + a_{26,n}b_{25,n} &= 3(na_{20,n}b_{20,n} + 2a_{30,n}b_{29,n}) \\ na_{18,n}b_{17,n} + a_{25,n}b_{25,n} &= 3(na_{19,n}b_{20,n} + 2a_{29,n}b_{29,n}) \\ -na_{17,n}b_{18,n} + a_{26,n}b_{26,n} &= 3(-na_{20,n}b_{19,n} + 2a_{30,n}b_{30,n}) \\ na_{18,n}b_{18,n} + a_{25,n}b_{26,n} &= 3(-na_{19,n}b_{19,n} + 2a_{29,n}b_{30,n}) \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} -2na_{15,n}b_{15,n} + 3a_{24,n}b_{23,n} &= 2na_{18,n}b_{18,n} + 3a_{28,n}b_{27,n} \\ 2na_{16,n}b_{15,n} + 3a_{23,n}b_{23,n} &= 2na_{17,n}b_{18,n} + 3a_{27,n}b_{27,n} \\ -2na_{15,n}b_{16,n} + 3a_{24,n}b_{24,n} &= -2na_{18,n}b_{17,n} + 3a_{28,n}b_{28,n} \\ 2na_{16,n}b_{16,n} + 3a_{23,n}b_{24,n} &= -2na_{17,n}b_{17,n} + 3a_{27,n}b_{28,n} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} -4a_{21,n}b_{21,n} &= a_{24,n}b_{24,n} \\ 4a_{22,n}b_{21,n} &= a_{23,n}b_{24,n} \\ 4a_{21,n}b_{22,n} &= a_{24,n}b_{23,n} \\ -4a_{22,n}b_{22,n} &= a_{23,n}b_{23,n} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} -a_{27,n}b_{27,n} &= 4a_{30,n}b_{30,n} \\ a_{28,n}b_{27,n} &= 4a_{29,n}b_{30,n} \\ a_{27,n}b_{28,n} &= 4a_{30,n}b_{29,n} \\ -a_{28,n}b_{28,n} &= 4a_{29,n}b_{29,n} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} -3a_{23,n}b_{23,n} &= 2a_{26,n}b_{26,n} \\ 3a_{24,n}b_{23,n} &= 2a_{25,n}b_{26,n} \\ 3a_{23,n}b_{24,n} &= 2a_{26,n}b_{25,n} \\ -3a_{24,n}b_{24,n} &= 2a_{25,n}b_{25,n} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} -2a_{25,n}b_{25,n} &= 3a_{28,n}b_{28,n} \\ 2a_{26,n}b_{25,n} &= 3a_{27,n}b_{28,n} \\ 2a_{25,n}b_{26,n} &= 3a_{28,n}b_{27,n} \\ -2a_{26,n}b_{26,n} &= 3a_{27,n}b_{27,n} \end{aligned} \right\}$$

Если частное решение находится в виде M слагаемых, то, применяя метод математической индукции, можно показать, что решение уравнения (1.1) может быть представлено как:

$$\begin{aligned} E &= X_1^{M-1}X_2^0 + X_1^{M-2}X_2 + \dots + X_1^kX_2^{M-1-k} + \dots + X_1X_2^{M-2} + \dots + X_1^0X_2^{M-1} = \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} X_1^{M-1-k}X_2^k, \end{aligned} \quad (1.13)$$

где

$$\begin{aligned} X_1^k &= ax_1^k \operatorname{Cos} nx_1 + a_1 x_1^k \operatorname{Sinn} x_1 + a_2 x_1^{k-1} \operatorname{Cos} nx_1 + a_3 x_1^{k-1} \operatorname{Sinn} x_1 + \dots + \\ &+ a_{2k} \operatorname{Cos} nx_1 + a_{2k+1} \operatorname{Sinn} x_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_2^{M-1-k} &= a_{2k+2} x_2^{M-1-k} \operatorname{Cos} nx_2 + a_{2k+3} x_2^{M-1-k} \operatorname{Sinn} x_2 + a_{2k+4} x_2^{M-2-k} \operatorname{Cos} nx_2 + \\ &+ a_{2k+5} x_2^{M-2-k} \operatorname{Sinn} x_2 + \dots + a_{2M-2} \operatorname{Cos} nx_2 + a_{2M-1} \operatorname{Sinn} x_2. \end{aligned}$$

В частном случае, при $a_{j,i} = 0$ для $i > 1$ и $a_{1,1} = a_{2,1} = 0$, (1.6) вырождается в $E = a \left[\frac{x-ct}{2} \sin(kx - wt + \alpha) + \frac{x+ct}{2} \sin(kx + wt + \beta) \right]$, (1.14)

где $k = n_i = \frac{w}{c}$; $\alpha = \psi - \varphi + \pi$; $\beta = \psi + \varphi$; $\alpha, \beta, \varphi, \psi, a, k, w$ -

произвольные константы.

Выражения (1.6), (1.13) и (1.14) удовлетворяют волновому уравнению (1.1). Они отличаются от привычного решения, найденного по методу Фурье тем, что их амплитудные коэффициенты зависят от координаты и времени. В форме (1.6) и (1.14) зависимость линейная. В формуле (1.13) амплитуда есть произвольная степень расстояния и времени.

Выражения (1.6), (1.13) и (1.14) физически представляют собой волны, движущиеся как в сторону возрастания, так и убывания оси x . Для неподвижного наблюдателя их амплитуды изменяются в пространстве и времени. Для наблюдателя, движущегося с одной из волн, эта волна имеет неизменную во времени амплитуду, убывающую или возрастающую по линейному (квадратичному, кубическому и т.д.) закону по мере удаления от наблюдателя перпендикулярно гребням волн. Такие плоские волны могут излучать, например, два бесконечных плоских поршня, посылающих волны навстречу друг другу, колеблющихся с изменяющейся амплитудой (по линейному, квадратичному, кубическому и т.д. закону во времени). Если амплитуда колебания поршней постоянна во времени, генерируемые волны имеют привычный вид.

2. О свойствах систем функций, полученных новым методом разделения переменных

Рассмотрим некоторые свойства функций, составляющих (1.6), необходимые в дальнейшем для представления отдельных зависимостей в виде ряда, разложенного по этим функциям.

Введем обозначение

$$f_{1,i} = a_i \cos n_i x + b_i \sin n_i x + c_i x \cos n_i x + d_i x \sin n_i x$$

и

$$\theta_{1,i} = a'_i \cos n_i x + b'_i \sin n_i x \quad a_i, b_i, c_i, d_i, a'_i, b'_i - \text{постоянные.}$$

Используя известные методы доказательства, изложенные, например, в [3], можно показать, что здесь имеют место ранее приведенные теоремы 1, 2, 3, 4.

Эти теоремы и следствия справедливы также для функций

$$f_{2,i} = a''_i \cos n_i ct + b''_i \sin n_i ct + c'_i ct \cos n_i ct + d'_i ct \sin n_i ct$$

$$\text{и } \theta_{2,i} = a'''_i \cos n_i ct + b'''_i \sin n_i ct, \quad a''_i, b''_i, c'_i, d'_i, a'''_i, b'''_i - \text{постоянные.}$$

Упомянутыми методами можно доказать также аналогичные теоремы и для нелинейных составляющих решения вида (1.13).

3. Постановка и решение краевой задачи

Движение электромагнитной волны, генерируемой неподвижным относительно наблюдателя монохроматическим источником, в вакууме при отсутствии гравитационного поля описывается, как известно, уравнениями Максвелла. Эти уравнения, если для упрощения рассмотреть плоскую задачу и считать, что магнитная и диэлектрическая проницаемости равны 1, а удельная проводимость равна 0, сводятся к двум волновым уравнениям вида (1.1) для электрической и магнитной составляющих излучения. Вследствие идентичности формы этих уравнений, в дальнейшем будет рассматриваться только уравнение по электрической составляющей.

Поместим начало координат в точку, где расположен источник монохроматического электромагнитного излучения.

Будем искать решение уравнения (1.1), удовлетворяющее следующим условиям:

$$\left. \begin{aligned} & а) \quad E|_{t=0} = 0 \\ & б) \quad E|_{x=0} = E_0 \sin \nu_0 ct \\ & E_0 \text{ и } \nu_0 - \text{соответственно, амплитуда} \\ & \text{и частота излучения источника} \\ & в) \text{ Значение энергии, переносимой} \\ & \text{электромагнитными волнами в единицу} \\ & \text{времени через условное сечение, постоянно} \\ & \text{в любой точке пространства по пути дви-} \\ & \text{жения волн, т. е.} \\ & \mathcal{E}|_{x=0} = \mathcal{E}|_{x=x_0} \\ & \text{или } |\overline{P}|_{x=0} = |\overline{P}|_{x=x_0} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

$|\overline{P}|_{x=0} = \frac{cE_0^2}{4\pi}$ и $|\overline{P}|_{x=x_0} = \frac{cE^2}{4\pi}$ - векторы Умова-Пойтинга, соответственно в точках $x=0$ и $x=x_0$.

Постановка такой задачи корректна, поскольку подстановка новой переменной $y = \frac{c(t-b)}{\sqrt{-1}}$ (где b - некоторая постоянная) в уравнении (1.1) и условия (3.1) сводят эту задачу к задаче Дирихле для прямоугольника (в комплексной области), корректность которой, как известно, доказана.

В связи с тем, что решение поставленной задачи с помощью метода Даламбера не приводит к определённом результату, с помощью метода Фурье даёт тривиальное решение, а вычислительные операции с помощью ЭВМ более

удобны в области действительных чисел, применим вышеизложенный метод разделения переменных.

Ограничиваясь формой решения (1.2) в виде суммы двух слагаемых, имеем:

$$E = E_0 \sin \nu_0 ct \cos \nu_0 x + \sum_i [(a_{1,n_i} \cos n_i ct + a_{2,n_i} \sin n_i ct)(b_{1,n_i} \cos n_i x + b_{2,n_i} \sin n_i x) + (a_{4,n_i} \cos n_i ct - a_{3,n_i} \sin n_i ct)ct(b_{3,n_i} \cos n_i x + b_{4,n_i} \sin n_i x) + (a_{3,n_i} \cos n_i ct + a_{4,n_i} \sin n_i ct)x(b_{4,n_i} \cos n_i x - b_{3,n_i} \sin n_i x)], \quad (3.2)$$

где $a_{1,n_i} \div a_{4,n_i}$, $b_{1,n_i} \div b_{4,n_i}$, n_i - постоянные интегрирования.

Подставляя решение (3.2) в условия (3.1,а), получаем:

$$\sum_i [a_{1,n_i} (b_{1,n_i} \cos n_i x + b_{2,n_i} \sin n_i x) + a_{3,n_i} (b_{4,n_i} \cos n_i x - b_{3,n_i} \sin n_i x)x] = 0,$$

откуда $a_{1,n_i} = a_{3,n_i} = 0$.

Далее из условия (3.1б) находим:

$$E_0 \sin \nu_0 ct + \sum_i (a_{2,n_i} b_{1,n_i} \sin n_i ct + a_{4,n_i} b_{3,n_i} ct \cos n_i ct) = E_0 \sin \nu_0 ct$$

и, следовательно, $b_{1,n_i} = b_{3,n_i} = 0$.

Таким образом, решение (3.2), удовлетворяющее условиям (3.1,а) и (3.1,б) принимает вид:

$$E = E_0 \sin \nu_0 ct \cos \nu_0 x + \sum_i [(a_{2,n_i} b_{2,n_i} \sin n_i x + a_{4,n_i} b_{4,n_i} x \cos n_i x) * \sin n_i ct + a_{4,n_i} b_{4,n_i} (\sin n_i x) ct \cos n_i ct]$$

Подставим это решение в условие (3.1,в). Введём обозначение:

$$\pm E_0 (1 \mp \cos \nu_0 x_0) = B,$$

$$a_{2,n_i} b_{2,n_i} \sin n_i x_0 + a_{4,n_i} b_{4,n_i} x_0 \cos n_i x_0 = C_{n_i}^*$$

$$a_{4,n_i} b_{4,n_i} \sin n_i x_0 = A_{n_i}^*$$

После простых преобразований имеем:

$$B \sin \nu_0 ct = \sum_i (A_{n_i}^* ct \cos n_i ct + C_{n_i}^* \sin n_i ct).$$

Рассмотрим интервал времени $t(0; \frac{\pi}{\nu_0 c})$; левая часть последнего равенства

на концах этого интервала обращается в 0.

Таким образом, должно быть справедливым соотношение

$$A_{n_i}^* \frac{\pi}{\nu_0} \cos n_i \frac{\pi}{\nu_0} + C_{n_i}^* \sin n_i \frac{\pi}{\nu_0} = 0, \quad (3.3)$$

где коэффициенты $A_{n_i}^*$ и $C_{n_i}^*$, согласно теореме 4 после интегрирования и простых преобразований, определяются как:

$$\begin{aligned}
A_{n_i}^* = B & \frac{\frac{1}{4\nu_0^2} \left[\frac{\sin \pi \left(1 + \frac{n_i}{\nu_0}\right)}{\left(1 + \frac{n_i}{\nu_0}\right)^2} - \frac{\pi \cos \pi \left(1 + \frac{n_i}{\nu_0}\right)}{\left(1 + \frac{n_i}{\nu_0}\right)} + \frac{\sin \pi \left(1 - \frac{n_i}{\nu_0}\right)}{\left(1 - \frac{n_i}{\nu_0}\right)^2} - \frac{\pi \cos \pi \left(1 - \frac{n_i}{\nu_0}\right)}{\left(1 - \frac{n_i}{\nu_0}\right)} \right] *}{\frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{\nu_0} - \frac{1}{2n_i} \sin \frac{2n_i \pi}{\nu_0} \right) \left[\frac{\pi^3}{3\nu_0^3} + \frac{\pi}{2n_i^2 \nu_0} \cos \frac{2n_i \pi}{\nu_0} + \left(\frac{\pi^2}{2n_i \nu_0^2} - \frac{1}{4n_i^3} \right) \sin \frac{2n_i \pi}{\nu_0} \right] -} \\
& * \left(\frac{\pi}{\nu_0} - \frac{1}{2n_i} \sin \frac{2n_i \pi}{\nu_0} \right) - \left[\frac{\sin \pi \left(1 - \frac{n_i}{\nu_0}\right)}{\left(1 - \frac{n_i}{\nu_0}\right)} - \frac{\sin \pi \left(1 + \frac{n_i}{\nu_0}\right)}{\left(1 + \frac{n_i}{\nu_0}\right)} \right] \frac{1}{8n_i \nu_0} \left(\frac{1}{2n_i} \sin \frac{2n_i \pi}{\nu_0} - \frac{\pi}{\nu_0} \cos \frac{2n_i \pi}{\nu_0} \right) \\
& - \left[\frac{1}{4n_i} \left(\frac{1}{2n_i} \sin \frac{2n_i \pi}{\nu_0} - \frac{\pi}{\nu_0} \cos \frac{2n_i \pi}{\nu_0} \right) \right]^2 \\
C_{n_i}^* = B & \frac{\left[\frac{\sin \pi \left(1 - \frac{n_i}{\nu_0}\right)}{\left(1 - \frac{n_i}{\nu_0}\right)} - \frac{\sin \pi \left(1 + \frac{n_i}{\nu_0}\right)}{\left(1 + \frac{n_i}{\nu_0}\right)} \right] \frac{1}{4\nu_0} \left[\frac{\pi^3}{3\nu_0^3} + \frac{\pi}{2n_i^2 \nu_0} \cos \frac{2n_i \pi}{\nu_0} + \left(\frac{\pi^2}{2n_i \nu_0^2} - \frac{1}{4n_i^3} \right) \sin \frac{2n_i \pi}{\nu_0} \right] -}{\frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{\nu_0} - \frac{1}{4n_i} \sin \frac{2n_i \pi}{\nu_0} \right) \left[\frac{\pi^3}{3\nu_0^3} + \frac{\pi}{2n_i^2 \nu_0} \cos \frac{2n_i \pi}{\nu_0} + \right.} \\
& \left. - \left[\frac{\sin \pi \left(1 + \frac{n_i}{\nu_0}\right)}{\left(1 + \frac{n_i}{\nu_0}\right)^2} - \frac{\pi \cos \pi \left(1 + \frac{n_i}{\nu_0}\right)}{\left(1 + \frac{n_i}{\nu_0}\right)} + \frac{\sin \pi \left(1 - \frac{n_i}{\nu_0}\right)}{\left(1 - \frac{n_i}{\nu_0}\right)^2} - \frac{\pi \cos \pi \left(1 - \frac{n_i}{\nu_0}\right)}{\left(1 - \frac{n_i}{\nu_0}\right)} \right] \frac{1}{8n_i \nu_0^2} \left(\frac{1}{2n_i} \sin \frac{2n_i \pi}{\nu_0} - \frac{\pi}{\nu_0} \cos \frac{2n_i \pi}{\nu_0} \right) \right.} \\
& \left. + \left(\frac{\pi^2}{2n_i \nu_0^2} - \frac{1}{4n_i^3} \right) \sin \frac{2n_i \pi}{\nu_0} \right] - \left[\frac{1}{4n_i} \left(\frac{1}{2n_i} \sin \frac{2n_i \pi}{\nu_0} - \frac{\pi}{\nu_0} \cos \frac{2n_i \pi}{\nu_0} \right) \right]^2
\end{aligned}$$

После подстановки последних в (3.3) и преобразований получаем выражение, из которого определяются все действительные n_i .

$$\begin{aligned}
& \frac{\pi}{\nu_0} \cos n_i \frac{\pi}{\nu_0} \left\{ \left[\frac{\sin \pi \left(1 + \frac{n_i}{\nu_0} \right)}{\left(1 + \frac{n_i}{\nu_0} \right)^2} - \frac{\pi \cos \pi \left(1 + \frac{n_i}{\nu_0} \right)}{\left(1 + \frac{n_i}{\nu_0} \right)} + \frac{\sin \pi \left(1 - \frac{n_i}{\nu_0} \right)}{\left(1 - \frac{n_i}{\nu_0} \right)^2} - \frac{\pi \cos \pi \left(1 - \frac{n_i}{\nu_0} \right)}{\left(1 - \frac{n_i}{\nu_0} \right)} \right] \frac{1}{\nu_0} * \right. \\
& * \left. \left(\frac{\pi}{\nu_0} - \frac{1}{2n_i} \sin \frac{2n_i \pi}{\nu_0} \right) - \left[\frac{\sin \pi \left(1 - \frac{n_i}{\nu_0} \right)}{\left(1 - \frac{n_i}{\nu_0} \right)} - \frac{\sin \pi \left(1 + \frac{n_i}{\nu_0} \right)}{\left(1 + \frac{n_i}{\nu_0} \right)} \right] \frac{1}{2n_i} \left(\frac{\sin \frac{2n_i \pi}{\nu_0}}{2n_i} - \frac{\pi}{\nu_0} \cos \frac{2n_i \pi}{\nu_0} \right) \right\} = \\
& = \sin \frac{n_i \pi}{\nu_0} \left\{ \left[\frac{\sin \pi \left(1 - \frac{n_i}{\nu_0} \right)}{\left(1 - \frac{n_i}{\nu_0} \right)} - \frac{\sin \pi \left(1 + \frac{n_i}{\nu_0} \right)}{\left(1 + \frac{n_i}{\nu_0} \right)} \right] \left[\frac{\pi^3}{3\nu_0^3} + \frac{\pi}{2n_i^2 \nu_0} \cos \frac{2n_i \pi}{\nu_0} + \left(\frac{\pi^2}{2n_i \nu_0^2} - \frac{1}{4n_i^3} \sin \frac{2n_i \pi}{\nu_0} \right) \right] - \right. \\
& - \left. \left[\frac{\sin \pi \left(1 + \frac{n_i}{\nu_0} \right)}{\left(1 + \frac{n_i}{\nu_0} \right)^2} - \frac{\pi \cos \pi \left(1 + \frac{n_i}{\nu_0} \right)}{\left(1 + \frac{n_i}{\nu_0} \right)} + \frac{\sin \pi \left(1 - \frac{n_i}{\nu_0} \right)}{\left(1 - \frac{n_i}{\nu_0} \right)^2} - \frac{\pi \cos \pi \left(1 - \frac{n_i}{\nu_0} \right)}{\left(1 - \frac{n_i}{\nu_0} \right)} \right] - \frac{1}{2n_i \nu_0} \left(\frac{\sin \frac{2n_i \pi}{\nu_0}}{2n_i} - \frac{\pi}{\nu_0} \cos \frac{2n_i \pi}{\nu_0} \right) \right\} \quad (3.4)
\end{aligned}$$

Выражение (3.4) имеет бесчисленное множество этих корней. Для доказательства объединим правую и левую его части и обозначим их, как z . Введём подстановку $n_i = \nu_0 \gamma$. Тогда, при γ - целом, но не равном 0 и $|1|$,

$$z = \frac{2\pi^3}{\nu_0^3(1-\gamma^2)} < 0;$$

При $\gamma = 0$, $z = 0$;

При $\gamma = 1, -1$, $z = 0$;

При $\gamma = \frac{\delta}{2}$, где δ - простое число и таково, что

$$\frac{1}{2\delta} \sqrt[3]{2\pi(4-\delta^2)^2 \left(\frac{2}{3} \pi^2 \delta^2 + \pi \delta - 2 \right)} > \nu_0,$$

$$z = \frac{1}{\nu_0^3} \left(\frac{2}{3} \pi^3 + \frac{\pi^2}{2\gamma} - \frac{\pi}{2\gamma^2} \right) - \frac{4\delta}{(1-\gamma^2)^2} > 0;$$

При достаточно большом $|\gamma|$ $z = \frac{2\pi^3}{3\nu_0^3} > 0$.

Из приведённого анализа видно, что z , являясь достаточно гладкой функцией, при переходе от целого значения γ к дробному меняет свой знак и бесконечное число раз проходит через нулевое значение.

Окончательное решение уравнения (1.1) удовлетворяющее условиям (3.1) будет:

$$E = E_0 \sin \nu_0 ct \cos \nu_0 x + \sum_i \left\{ \left[\left(\frac{C_{n_i}^*}{\text{Sinn}_i x_0} - x_0 ct \text{gn}_i x_0 \frac{A_{n_i}^*}{\text{Sinn}_i x_0} \right) \text{Sinn}_i x + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{A_{n_i}^*}{\text{Sinn}_i x_0} x \text{Cosn}_i x \right] \text{Sinn}_i ct + \frac{A_{n_i}^*}{\text{Sinn}_i x_0} \text{Sinn}_i x \cdot ct \text{Cosn}_i ct \right\}.$$

На рис. 1 схематично показан найденный характер движения электромагнитной волны.

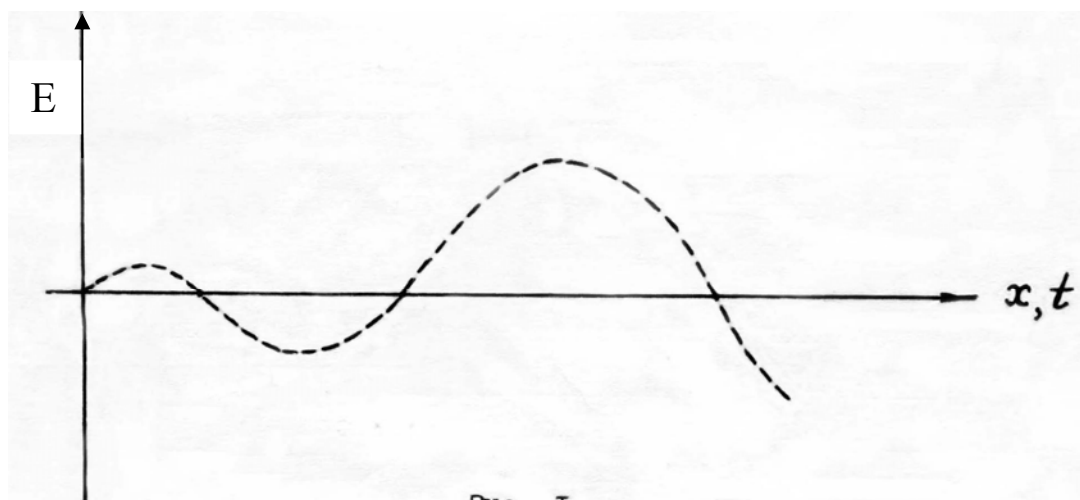


Рис. I

Список литературы

1. Гринберг Г.А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений.- М.-Л.: изд. АН СССР, 1948. С.65.
2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.-Л.: ГИТТЛ, 1980.
3. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: ГИТТЛ, 1953.
4. Лауфер М.Я. Обобщенный метод разделения переменных в приложении к одномерной краевой задаче для волнового уравнения. ДР-3388//Сборник рефератов ДР.-М.: ВИМИ, вып. 11, 1991.

О ФИЗИЧЕСКОЙ СУЩНОСТИ САМОПРОИЗВОЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОГО ИЗМЕНЕНИЯ ЧАСТОТЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

В работе дается физическая трактовка решению волнового уравнения для одномерной краевой задачи, из которого следует самопроизвольное уменьшение частоты электромагнитного излучения в процессе его распространения, как изолированной системы, в вакууме.

Доказывается, что уменьшение частоты электромагнитных волн является результатом действия второго закона термодинамики. При этом в качестве источника излучения рассматривается абсолютно черное тело, неподвижное относительно наблюдателя.

Явление связывается с космологическим "красным смещением", величина которого зависит не только от пространственно-временных параметров, но и от частоты излучения в источнике.

Известны два космологических механизма изменения частоты электромагнитного излучения - при относительном движении источника излучения и наблюдателя (эффект Доплера) и при воздействии на источник или приемник излучения гравитационного поля. Оба эти механизма не связаны с процессом распространения электромагнитных волн и воздействуют лишь на их условия передачи и приема.

Неоднократно делались попытки объяснить наблюдаемое космологическое "красное" смещение спектров электромагнитного излучения (эффект Хаббла), например [1], путём рассмотрения среды, способной поглощать энергию электромагнитных волн по мере их движения. Однако в основе теоретического обоснования этих гипотез заложены гипотетические положения, которые, в свою очередь, сами нуждаются в доказательствах.

Показано без привлечения дополнительных физических положений, что существует ещё и механизм пространственно-временного самопроизвольного изменения частоты электромагнитного излучения [2]. В этом плане вызывает интерес эксперимент, проведенный Садеком, Поулзом и Джапли в 1968 году (см. также Science news, 8/17/68 p.156), в котором зафиксировано падение частоты электромагнитной волны по мере её распространения, с учётом поправки на искажение от потерь энергии в воздушной среде и воздействия гравитационных полей [3].

Суть вытекающего из решения [2] механизма состоит в том, что по мере распространения электромагнитной волны в вакууме от неподвижного по отношению к наблюдателю источника (обмен энергией с окружающей средой отсутствует) происходит самопроизвольное уменьшение частоты излучения, величина которого зависит от частоты в источнике. Этот результат получен чисто математическим путём.

В данной работе рассмотрена физическая сущность механизма. Известно, что энергия излучения абсолютно черного тела, взятого в качестве источника, по закону Стефана-Больцмана выражается

$$\mathcal{E} = \sigma \cdot T^4, \quad (1)$$

Где σ - постоянная Больцмана;

T - абсолютная температура.

С другой стороны, по формуле Планка при достаточно низких частотах электромагнитной волны, соответствующих рассматриваемым,

$$\mathcal{E} \approx 7,28 \frac{\pi h \nu^4}{c^3}, \quad (2)$$

где h - постоянная Планка;

ν - частота излучения в произвольной точке пространства;

c - скорость света.

Сопоставляя (1) и (2), находим

$$\nu = \xi T, \quad (3)$$

$$\text{где } \xi = \sqrt[4]{\frac{\sigma c^3}{7,28 \pi h}}.$$

Рассмотрим далее два состояния изолированной системы S_0 и S , характеризующихся согласно второму закону термодинамики соотношениями

$$S_0 = \frac{Q_0}{T_0}; S = \frac{Q}{T}, \quad (4)$$

где S_0 и S - соответственно энтропия излучения в источнике и в произвольной точке пространства;

Q_0, Q - энергия излучения источника и в произвольной точке пространства в единицах тепла.

Поскольку электромагнитная волна рассматривается как изолированная система, то по закону сохранения энергии

$$Q_0 = Q$$

Согласно [2] $\nu_0 > \nu$

Используя зависимости (3), имеем $T_0 > T$

и на основании (4) находим $S_0 < S$.

Из этого соотношения видно, что падение частоты излучения в процессе распространения электромагнитных волн в вакууме от источника, неподвижного относительно наблюдателя, сопровождается ростом энтропии электромагнитной энергии, не связанным с ее рассеиванием.

Можно сказать, что общепринятая в настоящее время концепция расширяющейся Вселенной, получила свое теоретическое обоснование лишь в результате решения А.А. Фридманом уравнений тяготения. Это решение было получено, исходя из достаточно грубого предположения - равномерного распределения материи в пространстве. В действительности материя распределена в пространстве далеко не равномерно. Поэтому нет никаких оснований предполагать, что в этом случае решение уравнений тяготения будет описывать модель расширяющейся Вселенной. Это, так сказать, - теоретические аспекты.

Единственным, казалось бы весьма веским подтверждением концепции расширяющейся Вселенной, явилось открытое Хабблом красное смещение, для объяснения которого не существовало иного толкования, кроме как, что оно есть следствие эффекта Допплера.

Однако из частного решения волнового уравнения, представленного в статье, с неумолимой логикой вытекает возможность существования процесса распространения электромагнитных волн в вакууме, идущего во времени и пространстве с возрастанием амплитуды, а, следовательно, ввиду отсутствия рассеивания энергии, уменьшением частоты. Последнее находится в полном соответствии с пока незыблемым принципом обязательного повышения энтропии при протекании наблюдаемых необратимых физических процессов. Здесь имеется ввиду ухудшение качества э/м энергии (её способности производить работу) вследствие уменьшения частоты и увеличения амплитуды э/м волны, т.е. грубо говоря, стремления к выравниванию, “концентрации” э/м энергии в пространстве, (эффект энтропийного покраснения ранее никак не вытекал из решения волнового уравнения, поскольку при интегрировании последнего на решение накладывалось ничем не обоснованное и не имеющее физического смысла ограничение.)

Итак, появилась возможность иного толкования красного смещения, не основанного на эффекте Допплера.

В связи с этим, автору представляется, до получения других: независимых данных наблюдений не осталось сколько-нибудь веских оснований считать красное смещение прямым доказательством расширения видимой части Вселенной. Следовательно, модели расширяющейся и нерасширяющейся Вселенной с этой точки зрения становятся равноправными.

Решение краевой задачи, отвечающее предположению о нерасширяющейся Вселенной, даётся в статье только в целях обоснования законности обобщающего метода разделения переменных и математических возможностей полученных фундаментальных функций, определивших вышеуказанный процесс энтропийного покраснения света и не должно рассматриваться как обоснование концепции нерасширяющейся Вселенной, т.к. аналогичное решение, вообще говоря, может быть получено и с помощью уже известных функций Фурье.

Из полученного решения вытекает возможность существования нелинейных волновых эффектов любого порядка, а также возможность нарушения закона суперпозиции волн.

Список литературы

1. Киппер А. (Тартуская астрофизическая обсерватория им. В. Струве). Старение и конечное время жизни фотона в космологическом пространстве.//Таллин, Валгусс, 1981.
2. Лауфер М.Я. Обобщенный метод разделения переменных в приложении к одномерной краевой задаче для волнового уравнения. ДР-3388// Сборник рефератов ДР – М.: ВИМИ, вып. 11, 1991.
3. Dror Sadeh, Stephen Knowles, Benjamin Au. The Effect of Mass on Frequency.// Science. 9 august 1968, p.567-569.
4. Лауфер М.Я. О физической сущности самопроизвольного пространственно-временного изменения частоты электромагнитного излучения. ДР–3442. // Сборник рефератов ДР. – М.; ВИМИ, вып. 8-9, 1993.

К ДИНАМИКЕ РЕАЛЬНЫХ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ

В статье рассмотрен процесс распространения поперечных колебаний в гибкой нерастяжимой нити. Полученное волновое уравнение, описывающее это явление, отличается от классического волнового уравнения Фурье тем, что в нём учитывается движение частиц материи не только в направлении перпендикулярном направлению распространения волны, но и в продольном направлении. В отличие от известных решений этой задачи в работе впервые при выводе волнового уравнения применено условие неразрывности проводящей среды. Решена краевая задача при отсутствии начального натяжения нити. Показано, что в этих условиях Уравнение Фурье полностью вырождается. Полученный результат дает возможность более верно решать практические задачи, связанные с волновыми процессами.

1. Постановка задачи.

Классическая механика описывает картину распространения, например, плоских поперечных волн в различных средах (см. рис. 1) как последовательные во времени состояния возмущенной среды [1]. Каждая частица среды согласно этим представлениям совершает колебательное движение в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения волны. Поступательное движение частиц в направлении распространения волны отсутствует. Таким образом, сама среда, вне зависимости от своих физических свойств, а также начальных и граничных условий, всегда в целом, остаётся неподвижной в продольном направлении и во всех случаях распространения в ней плоских волн констатируется лишь передача в этом направлении некоторого состояния движения (энергии и импульса), а не поток движущихся частиц среды.

Математическое описание этих волн дается известным уравнением

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad (1)$$

где a - скорость распространения волны.

Такое понимание природы распространения волн в средах, как будет показано ниже, является упрощенным, поскольку физические свойства среды оказывают принципиальное влияние на характер колебательного процесса.

В доказательство последнего рассмотрим следующий пример. На гладкую горизонтальную плоскость положим гибкую нить. Такой нитью может служить, например, состоящая из отдельных звеньев металлическая цепь. Исходное положение нити показано на фиг.2 пунктирной линией. Пусть один конец нити прикреплен к ползуну "А", имеющему свободу движения в направлении оси U . Придадим ползуну "А" колебательное движение, перемещая его вдоль оси U , например, по закону $U = A \sin \nu t$, где " A " - амплитуда колебаний, а ν - частота. По нити, представляющей из себя среду с вышеуказанными физическими свойствами, начнёт распространяться плоская волна. При этом частицы нити станут перемещаться вдоль оси x в направлении обратном направлению распространения этой волны. Поступательное движение

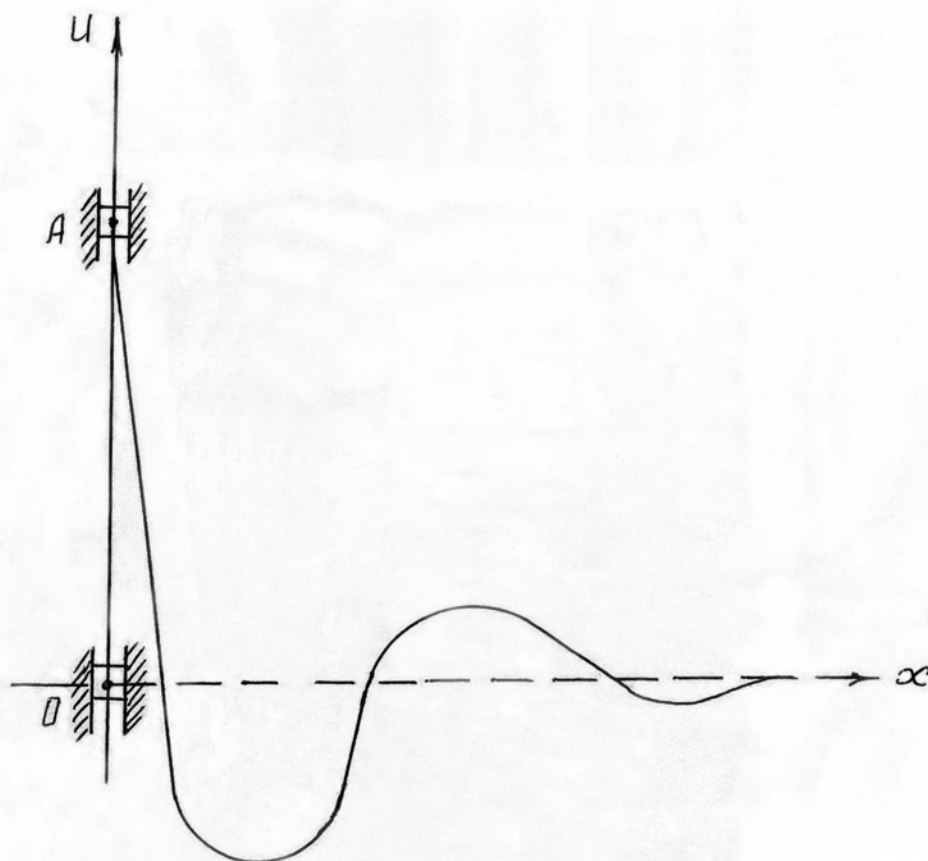


Рис. 2

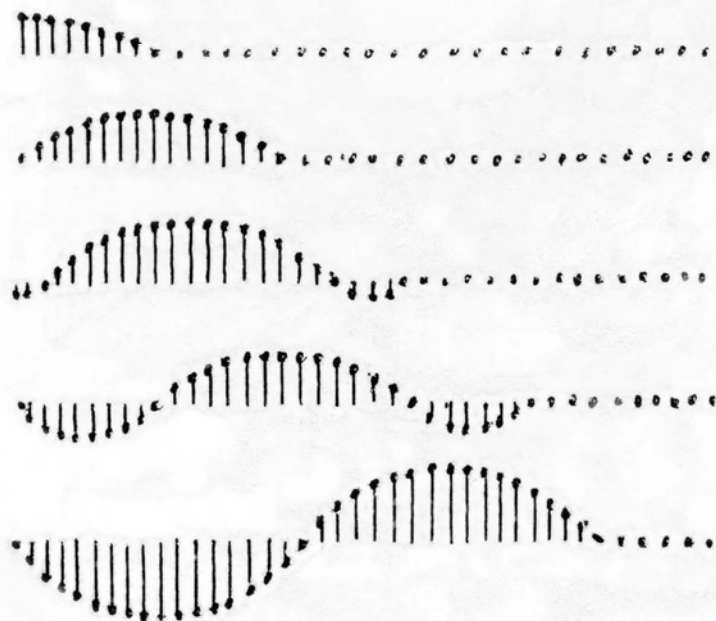


Рис. 1

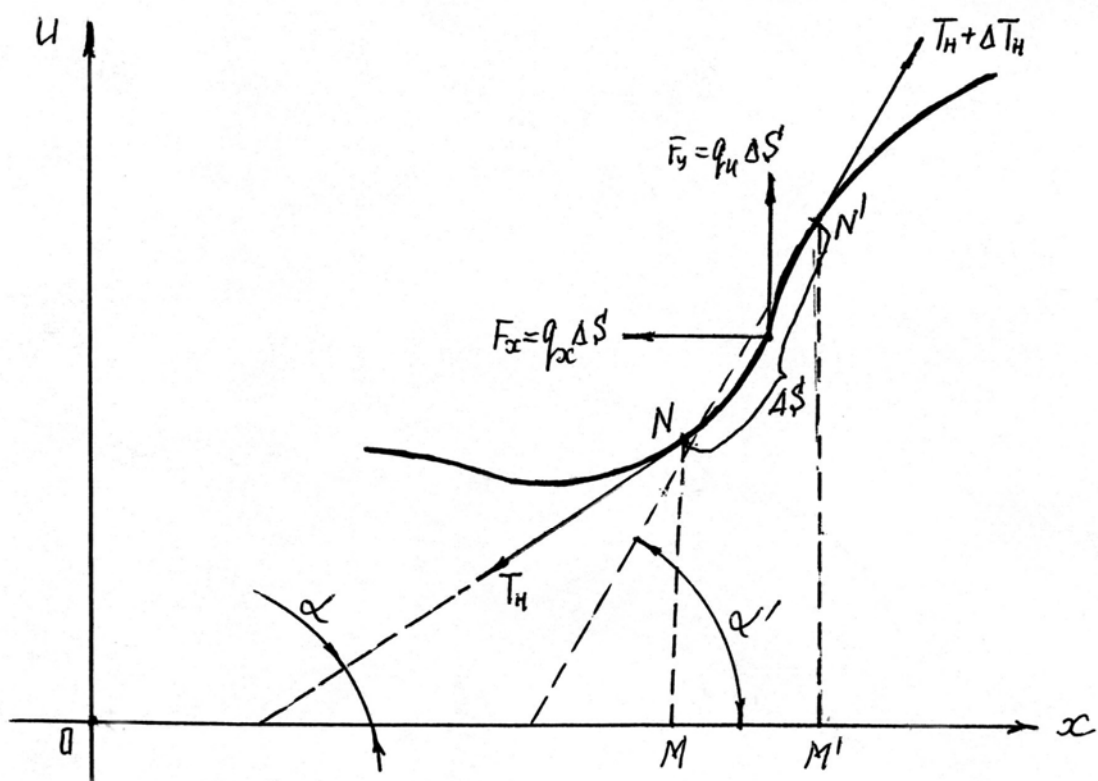


Рис. 3

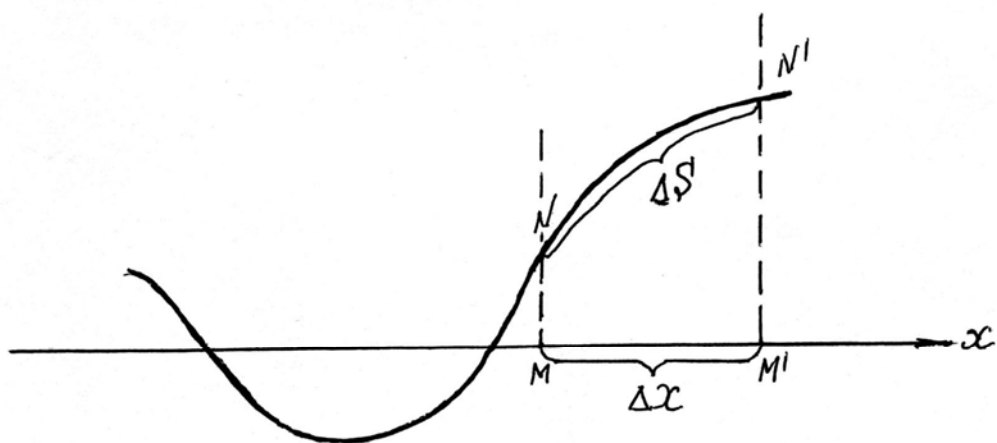


Рис. 4

частиц будет происходить до тех пор, пока инерционные силы, вызывающие натяжение нити, не уравниваются силами трения.

Из этого примера видно, что кроме распространения по нити некоторого состояния движения, имеет место и направленный поток частиц нити. Кроме того, амплитуда и частота волны, вследствие энергетических потерь, вдоль нити, не остаются постоянными даже при монохроматических колебаниях ползуна "А". Данный пример наглядно указывает на несостоятельность классической картины распространения плоских волн в реальных средах, описываемой уравнением (1).

Попытки исправить эту несостоятельность предпринимались неоднократно (см., например, [2] и [3]). Однако они не имели полного успеха, т.к. при выводе уравнения колебаний: не учитывалось свойство неразрывности среды, в которой распространяется волна.

Для простоты рассмотрим случай нерастяжимой гибкой нити. Выделим из неё элемент, как показано на рис. 3. Действие остальной её части на этот элемент заменим силами натяжения T_H , направленными в противоположные стороны по касательной и приложенными к концам элемента. Будем считать нить однородной и, во избежание нереальной картины с бесконечной массой, конечной по длине. Рассмотрим колебания нити лишь с амплитудой, когда можно пренебречь $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2$ по сравнению с единицей.

F_U и F_x - внешние силы, действующие на элемент ΔS .

Проектируя силы на оси U и x и добавляя к ним силы инерции, имеем:

$$\left. \begin{aligned} -T_H \sin \alpha + (T_H + \Delta T_H) \sin \alpha' + F_U &= \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \Delta S \\ -T_H \cos \alpha + (T_H + \Delta T_H) \cos \alpha' - F_x &= \rho \frac{\partial V}{\partial t^2} \Delta S \end{aligned} \right\}, \quad (1.1)$$

где ρ - плотность нити;

V - скорость частиц нити вдоль оси x .

Принимая во внимание, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial U}{\partial x},$$

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2}} \cong \frac{\partial U}{\partial x};$$

$$\cos \alpha = \frac{\Delta x}{\Delta \delta} = \frac{\Delta x}{\Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2}} \cong 1;$$

$$\begin{aligned} \sin\alpha' - \sin\alpha &= \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{N'} - \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_N = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Delta x, \\ \cos\alpha' - \cos\alpha &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2}} = -\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Delta x. \end{aligned}$$

Получаем

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= T_H \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial T_H}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) + q_u \\ \rho \frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{\partial T_H}{\partial x} - q_x - T_H \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \end{aligned} \right\}. \quad (1.2)$$

Из второго уравнения системы (1.2) имеем:

$$\frac{\partial T_H}{\partial x} - T_H \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial V}{\partial t} + q_x.$$

Интегрируя это выражение, получаем:

$$T_H = e^{-\int \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} dx} \left[\left(\rho \frac{\partial V}{\partial t} + q_x \right) e^{\int \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} dx} + T_0 \right].$$

Поскольку

$$e^{-\int \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} dx} = e^{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2} \cong 1.$$

Окончательно получаем

$$T_H = \int \left(\rho \frac{\partial V}{\partial t} + q_x \right) dx + T_0. \quad (1.3)$$

Подставляя (1.3) в первое уравнение (1.2), после простых преобразований, имеем:

$$\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \left[\int \left(\rho \frac{\partial V}{\partial t} + q_x \right) dx + T_0 \right] \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \left(\rho \frac{\partial V}{\partial t} + q_x \right) \frac{\partial U}{\partial x} + q_u. \quad (1.4)$$

Следует отметить, что условие

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} + q_x = 0 \text{ при } q_H = 0 \text{ и } T_0 \neq f(t) \text{ или } T_0 = \text{Const} \quad (1.5)$$

приводит уравнение (1.4) к обычному (классическому) волновому уравнению.

Поскольку, при неустановившихся колебаниях нити имеет место поступательное движение ее частиц вдоль направления распространения волны, то к полученным ранее уравнениям следует добавить еще уравнение неразрывности.

Возьмем два произвольных сечения MN и MN' (рис. 4), отстоящих друг от друга на расстоянии Δx . При движении частиц нити вдоль оси x в область, ограниченную этими двумя сечениями, через сечение MN' за время Δt поступит масса

$$m' = \rho_1 V_{N'} \Delta t.$$

В то же время из указанной области через сечение MN уйдет масса

$$m = \rho V_N \Delta T .$$

Таким образом, в области, ограниченной сечениями $M'N'$ и MN произойдет изменение массы на величину

$$\Delta m = m' - m = (\rho_1 V_{N'} - \rho V_N) \Delta t = \frac{\partial}{\partial x} (\rho V) \Delta x \Delta t .$$

С другой стороны это изменение массы можно представить как

$$\Delta m = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \Delta S) \Delta t = \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \sqrt{1 + \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2} \Delta x \right) \Delta t \cong \frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x \Delta t + \rho \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} \Delta x \Delta t .$$

Приравнявая оба последних выражения для Δm , получим искомое уравнение неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho V) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} . \quad (1.6)$$

Поскольку по условию $\rho = Const$, то

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} .$$

И далее

$$V = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 dx + a_0 , \quad (1.7)$$

где a_0 - в общем случае может быть некоторой функцией от t . С другой стороны положим, что

$$q_x = q_U = 0, \quad V_0 = 0, \quad \text{а} \quad \frac{T_0}{\rho} = a^2 = Const .$$

После подстановки (1.7) в (1.4) и простых преобразований получаем следующее искомое выражение для колебаний нити

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \iint \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 (dx)^2 \right] . \quad (1.8)$$

Условие $T_0 = Const$ означает, что нить в начальный момент времени имеет некоторое натяжение и все её частицы неподвижны в начальный момент времени в направлении оси x . Следует также отметить, что при $T_0 = 0$ классическое волновое уравнение вырождается в то время, как уравнение (1.8) переходит в

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \iint \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 (dx)^2 \right] . \quad (1.9)$$

интеграл которого даёт определённое решение волновой задачи. При этом скорость распространения поперечной волны вдоль оси x не равна нулю и переменна. Уравнения (1.8), а также (1.9) могут быть представлены в дифференциальной форме

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2,$$

где $y = \int U dx$

Применяя метод Фурье разделения переменных, будем искать частотное решение уравнения (1.9) в виде

$$U = TX, \quad (1.10)$$

где T и X - функции зависящие соответственно от t и x , удовлетворяющие следующим начальным и граничным условиям:

$$\begin{aligned} 1. \ t=0 \quad U=0 \quad 3. \ x=0 \quad U=ASin \nu t \\ 2. \ t=0 \quad \frac{\partial U}{\partial t} = V_0 \quad 4. \ x=0 \quad \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

Здесь A и ν - соответственно амплитуда и частота вынужденных колебаний;

V_0 - начальная скорость движения.

2. Решение поставленной задачи

Подставляя (1.10) в (1.9), после преобразований имеем

$$\frac{T''}{TT'^2 + T^2 T''} = \frac{[X' \int X'^2 (dx)^2]}{X},$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \frac{T''}{TT'^2 + T^2 T''} &= n^2 \\ \frac{[X' \int X'^2 (dx)^2]}{X} &= n^2 \end{aligned} \right\}, \quad (2.1)$$

где n - некоторая постоянная.

Проинтегрируем первое уравнение (2.1). Введём подстановку

$$T' = P^*; \quad T'' = P^* P^{*'}.$$

Тогда

$$P^* P^{*'} = n^2 T (P^{*2} + T P^* P^{*'});$$

$$\frac{P^{*'}}{P^*} = \frac{n^2 T}{1 - n^2 T^2}.$$

Переходя к старой переменной, имеем

$$T' = \frac{C_1}{\sqrt{1 - n^2 T^2}}. \quad (2.2)$$

И, следовательно,

$$C_1 t + C_2 = \frac{1}{2n} \left(n T \sqrt{1 - n^2 T^2} + \text{arcSinn} T \right). \quad (2.3)$$

Или в параметрической форме

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{nP} \sqrt{P^2 - C_1^2} \\ t &= \frac{1}{C_1} \left\{ \frac{1}{2n} \left[\frac{C_1 \sqrt{P^2 - C_1^2}}{P^2} + \arcsin \frac{\sqrt{P^2 - C_1^2}}{P} \right] - C_2 \right\} \end{aligned} \right\}, \quad (2.4)$$

где P - параметр; C_1 и C_2 - постоянные интегрирования.

Во втором уравнении (2.1) введём новую переменную $X' = q^*$

Тогда

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{dX} \cdot \frac{dX}{dx} = q^* \frac{d}{dX} \quad dx = \frac{1}{q^*} dX.$$

$$\text{Получаем } q^* \left[q^* \int (dX)^2 \right]_X = n^2 X,$$

откуда после преобразований

$$\frac{q^* dq^*}{n^2 - q^{*2}} = \frac{2dX}{X}.$$

Интегрируем последнее выражение

$$q^* = \frac{dX}{dx} = \frac{\sqrt{n^2 X^4 - C_3^2}}{X^2}. \quad (2.5)$$

И затем второй раз

$$x = \int \frac{X^2 dX}{\sqrt{n^2 X^4 - C_3^2}} + C_4, \quad (2.6)$$

где C_3 и C_4 - постоянные интегрирования.

В параметрической форме

$$\left. \begin{aligned} X &= \sqrt[4]{\frac{C_3^2}{n^2 - q^2}} \\ x &= \frac{1}{2\sqrt{C_3}} \int \frac{dq}{(n^2 - q^2)^{5/4}} + C_4 \end{aligned} \right\}, \quad (2.7)$$

где q - параметр.

Подставим (1.10) в (1.7) и, используя (2.4), (2.5) и (2.6) получим:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int T^2 X'^2 dx = TT' \int X'^2 dx = \frac{C_1 T}{\sqrt{1 - n^2 T^2}} \int \left[\frac{\sqrt{n^2 X^4 - C_3^2}}{X^2} \right]^2 * \\ &\quad * \frac{X^2 dX}{\sqrt{n^2 X^4 - C_3^2}} \end{aligned}$$

Интеграл в правой части последнего равенства берётся следующим образом

$$\int \left[\frac{\sqrt{n^2 X^4 - C_3^2}}{X^2} \right]^2 \frac{X^2 dX}{\sqrt{n^2 X^4 - C_3^2}} = \int \frac{\sqrt{n^2 X^4 - C_3^2}}{X^2} dX$$

Применим способ интегрирования по частям

$$\sqrt{n^2 X^4 - C_3^2} = U, \quad \frac{dX}{X^2} = dV, \quad \frac{2n^2 X^3 dX}{\sqrt{n^2 X^4 - C_3^2}} = dU, \quad -\frac{1}{X} = V.$$

$$\text{Тогда } \int \frac{\sqrt{n^2 X^4 - C_3^2}}{X^2} dX = -\frac{\sqrt{n^2 X^4 - C_3^2}}{X} + 2n^2 \int \frac{X^2 dX}{\sqrt{n^2 X^4 - C_3^2}}$$

Воспользуемся (2.6)

$$\int \frac{\sqrt{n^2 X^4 - C_3^2}}{X^2} dX = -\frac{\sqrt{n^2 X^4 - C_3^2}}{X} + 2n^2 (x - C_4).$$

Окончательно имеем

$$V = \frac{C_1 T}{\sqrt{1 - n^2 T^2}} \left[2n^2 (x - C_4) - \frac{\sqrt{n^2 X^4 - C_3^2}}{X} \right] + C_5. \quad (2.8)$$

Для нахождения постоянных интегрирования используем начальное условие 1 из (1.11). Применяя (2.4), имеем $T=0$, если $P=C_1$, тогда $C_2=0$. Поскольку при $t=0$, $T=0$, то следовательно, из (2.8) $V=C_5=V_0$. Используя далее условие 2 из (1.11) и привлекая (2.2), получаем $C_1=V_0$.

В параметрической форме

$$U = TX = \frac{1}{nP} \sqrt{P^2 - V_0^2} \sqrt[4]{\frac{C_3^2}{n^2 - q^2}}.$$

Тогда, согласно (2.5)

$$\frac{\partial U}{\partial x} = T \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{1}{nP} \sqrt{P^2 - V_0^2} \frac{\sqrt{n^2 X^4 - C_3^2}}{X^2}.$$

Используя далее первое уравнение (2.7), имеем

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{nP} \sqrt{P^2 - V_0^2} q.$$

Из последнего выражения по четвёртому условию (1.11) видно, что, если $x=0$, то $\frac{\partial U}{\partial x}=0$ и, следовательно, $q=0$. Далее, используя (2.2) и первое уравнение (2.4), получаем

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t} X = \frac{P}{n} \sqrt{P^2 - V_0^2} \left[2n^2 (x - C_4) - q \sqrt[4]{\frac{C_3^2}{n^2 - q^2}} \right] + V_0$$

При $t=0$ и $x=0$, $\frac{\partial U}{\partial t} = V_0$, следовательно, $C_4=0$.

Поскольку при $x=0$, $q=0$, то

$$U = A \sin vt = \frac{1}{nP} \sqrt{P^2 - V_0^2} \sqrt[4]{\frac{C_3^2}{n^2}}$$

Если $t = \frac{\pi n}{2\nu}$, где $n = 2m + 1$, $m = 0, 1, 2, \dots$, тогда

$$A = \frac{1}{nP_0} \sqrt{P_0^2 - V_0^2} \sqrt[4]{\frac{C_3^2}{n^2}}. \quad (2.9)$$

Из этого равенства определяется C_3 . Для определения P_0 при $t = \frac{\pi n}{2\nu}$ применим второе уравнение (2.4), из которого получаем

$$\frac{\pi n}{2\nu} = \frac{1}{2nV_0} \left(\frac{V_0 \sqrt{P_0^2 - V_0^2}}{P_0^2} + \arcsin \frac{\sqrt{P_0^2 - V_0^2}}{P_0} \right).$$

Или

$$\frac{\pi n^2}{V_0 \nu} = \frac{V_0 \sqrt{P_0^2 - V_0^2}}{P_0^2} + \arcsin \frac{\sqrt{P_0^2 - V_0^2}}{P_0}. \quad (2.10)$$

Окончательное решение уравнения (1.8) выразится так

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} UT = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{P} \sqrt{P^2 - V_0^2} \sqrt[4]{\frac{1}{n^2 - q^2}} \left(\frac{An^2 P_0}{\sqrt{P^2 - V_0^2}} \right).$$

Список литературы

1. Андреев Н.Н., Ржевкин С.Н., Горелик Г.С. Курс физики. Т.1. – М.-Л.: ОГИЗ, 1948.
2. Зак М.А. О некоторых динамических явлениях в гибких нитях // Прикладная математика и механика/ Т. 32, вып. 1, 1968.
3. Ивович В.А. Нелинейные колебания гибкой нити при случайном стационарном воздействии.// Прикладная механика. Т.3, вып. 9.- К.: Наукова думка. 1967.
4. Лауфер М.Я. К динамике реальных волновых процессов//Вопросы технологии, эффективности производства и надёжности. Вып. 18. – Северодвинск: Севмашвуз; НТО им. акад. Крылова А.Н., 2001. С. 54-64.

ОБ ОБЩЕМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ СТАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

1. Введение.

Выбор формы общего решения уравнений упругого равновесия в первую очередь определяется соображениями наибольшей простоты решения краевой задачи.

Наиболее часто применяемые в этом смысле формы решения плоской задачи теории упругости при отсутствии массовых сил представляются в декартовых координатах посредством либо функции напряжений Эри, когда граничные условия задаются в напряжениях, либо функций перемещений Б.Г. Галеркина [4] когда граничные условия задаются в перемещениях.

Аналог этих решений в полярных координатах известен только для случая выражения решения через функцию напряжений по методу Эри.

В настоящей работе предлагается решение в перемещениях уравнений равновесия в полярных координатах, выраженное посредством функций, подобных функциям перемещений Б.Г. Галеркина. Это решение не сводится к решению Б.Г. Галеркина простым преобразованием координат. Полагается, что оно восполнит указанный пробел и позволит сравнительно просто решить некоторые практические задачи.

Кроме этого в работе рассматриваются решения уравнений равновесия для общего случая в цилиндрических координатах.

А. Лявом предложено универсальное решение уравнений упругого равновесия в цилиндрических координатах при отсутствии массовых сил [2]. Как показано в работе [1] (рассматривался частный случай - осесимметричная задача), решения Б.Г. Галеркина, П.Ф. Папковича, К. Вебера и других авторов по существу ничего нового не добавляют к решению А. Лява и определенными преобразованиями могут быть сведены к последнему.

Однако поскольку общее решение уравнений равновесия должно содержать, как известно, не менее трех произвольных гармонических функций, а решение А. Лява содержит только одну бигармоническую функцию вращения, то оно не может считаться общим решением. Таким образом, поиски других независимых решений, которые могли бы послужить основой для построения общего решения уравнений равновесия в самом общем случае трехмерной задачи в цилиндрических координатах нельзя считать завершенными.

На основе решений, представленных в настоящей работе для случая полярных координат, дополнительно к решению А. Лява предлагаются два независимых решения уравнений равновесия для общего случая трехмерной задачи теории упругости в цилиндрических координатах. Каждое из этих решений содержит одну бигармоническую функцию вращения.

В работе даются новые формы решения плоской и пространственной задачи статической теории упругости.

Указанные формы существующими приемами не удастся свести к одной из известных форм или друг к другу. На основании этого делается вывод, что полученные выражения в совокупности являются наиболее общими решениями уравнений Ламе в пространстве и на плоскости, с помощью которых может быть расширен круг исследования практических задач прочности.

Общее решение пространственной задачи теории упругости при отсутствии объёмных сил выражается через три гармонических функции, а плоской задачи - через две таких функции [1]. Поскольку данные положения пока не имеют строгого математического обоснования, рядом авторов ([2]... [5], [7] и [8]) в разное время предпринимались попытки получить решения уравнений Ламе отличающиеся по форме от найденных предшественниками.

В конечном итоге это обстоятельство способствовало расширению круга решенных краевых задач и нет необходимости убеждать специалистов в актуальности нахождения новых форм решения упомянутых уравнений.

В данной работе представлены новые формы решений плоской и пространственной задач теории упругости, исходя из того, что общее решение плоской задачи должно содержать две бигармонических функции, а пространственной - три таких функции.

2. Решение плоской задачи теории упругости

Уравнения упругого равновесия, например, в полярных координатах r и φ без учёта объёмных сил имеют вид

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial r} - \mu \frac{U}{r^2} + \mu \nabla^2 U - \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \varphi} &= 0 \\ \left(\frac{\lambda + \mu}{r} \right) \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi} - \mu \frac{V}{r^2} + \mu \nabla^2 V + \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \varphi} &= 0 \\ \Delta &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rU) + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \end{aligned} \right\}, \quad (2.1)$$

где: U и V - перемещения, соответственно вдоль осей r и φ ;

λ и μ - упругие постоянные в обозначениях Ламе.

Опуская промежуточные операции, в виду их громоздкости, частные решения системы (2.1) будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= Br \nabla^2 \Phi_1 + r \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} - (rB + 1) \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \\ V_1 &= \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r \partial \varphi} + \frac{2(B+1)}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} \end{aligned} \right\}, \quad (2.2)$$

$$\text{где } B = -\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}$$

и

$$\left. \begin{aligned} U_2 &= \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial r \partial \varphi} + \frac{2B}{r} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} \\ V_2 &= Br \nabla^2 \Phi_2 + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \varphi^2} - 2B \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \end{aligned} \right\}. \quad (2.3)$$

Непосредственной подстановкой выражений (2.2) и (2.3) в систему (2.1) легко убедиться, что последнее тождественно удовлетворяется, если Φ_1 и Φ_2 суть бигармонические функции, т.е.

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi_{1,2} = 0.$$

Общее решение системы (2.1) будет

$$\left. \begin{aligned} U &= U_1 + U_2 \\ V &= V_1 + V_2 \end{aligned} \right\}. \quad (2.4)$$

Отождествить (2.4) с известными решениями системы (2.1) не удалось и оно не сводится методом, изложенным в [1], к представлению через две гармонические функции.

3. Решение пространственной задачи теории упругости

Уравнения упругого равновесия в цилиндрических координатах и без учёта массовых сил имеет вид

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial r} - \mu \frac{U}{r^2} + \mu \nabla^2 U - \frac{r\mu}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} &= 0 \\ \left(\frac{\lambda + \mu}{r} \right) \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi} - \mu \frac{v}{r^2} + \mu \nabla^2 V + \frac{2\mu}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} &= 0 \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w &= 0 \\ \Delta &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rU) + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \right\}, \quad (3.1)$$

где w - перемещение вдоль оси z .

Решением (3.1) по А. Ляду является система

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= \frac{\partial^2 \Phi_1^*}{\partial r \partial z} \\ v_1 &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi_1^*}{\partial \varphi \partial z} \\ w_1 &= B \nabla^2 \Phi_1^* + \frac{\partial^2 \Phi_1^*}{\partial z^2} \end{aligned} \right\}, \quad (3.2)$$

где Φ_1^* - бигармоническая функция, удовлетворяющая уравнению

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi_1^* = 0.$$

Как при решении плоской задачи теории упругости, опуская промежуточные операции, к решению (3.2) находим ещё два дополнительных независимых решения системы (3.1).

$$\left. \begin{aligned} U_2 &= \frac{\partial^2 \Phi_2^*}{\partial r \partial \varphi} + \frac{2B}{r} \frac{\partial \Phi_2^*}{\partial \varphi} \\ V_2 &= B \nabla^2 \Phi_2^* + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi_2^*}{\partial \varphi^2} - 2B \frac{\partial \Phi_2^*}{\partial r} \\ w_2 &= \frac{\partial^2 \Phi_2^*}{\partial \varphi \partial z} \end{aligned} \right\}, \quad (3.3)$$

где Φ_2^* - бигармоническая функция, удовлетворяющая уравнению $\nabla^2 \nabla^2 \Phi_2^* = 0$,

и

$$\left. \begin{aligned} U_3 &= Br \nabla^2 \Phi_3 + r \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial r^2} - (2B+1) \frac{\partial \Phi_3}{\partial r} \\ V_3 &= \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial r \partial \varphi} - \frac{2(B+1)}{r} \frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi} \\ w_3 &= r \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial r \partial z} - 2(2B+1) \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \end{aligned} \right\}, \quad (3.4)$$

где Φ_3 - функция, удовлетворяющая уравнению

$$\nabla^2 \Phi_3 = \psi(r, \varphi),$$

а $\psi(r, \varphi)$ - гармоническая функция, удовлетворяющая уравнению

$$\nabla^2 \psi = 0.$$

Общее решение системы (3.1) будет

$$\left. \begin{aligned} U &= U_1 + U_2 + U_3 \\ V &= V_1 + V_2 + V_3 \\ w &= w_1 + w_2 + w_3 \end{aligned} \right\}. \quad (3.5)$$

Решения (3.2), (3.3) и (3.4), как и в плоской задаче, не удалось свести одно к другому и, тем самым, уменьшить их количество в (3.5). Поэтому можно с большой долей уверенности утверждать, что (3.5) представляет собой самое общее решение системы (3.1) или, по крайней мере, весьма близкое к нему.

Компоненты тензора напряжений через перемещения (2.3) находятся как:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \lambda(B+1) \frac{\partial}{\partial \varphi} \nabla^2 \Phi_2^* + 2\mu \left(\frac{\partial^3 \Phi_2^*}{\partial r^2 \partial \varphi} + \frac{2B}{r} \frac{\partial^2 \Phi_2^*}{\partial r \partial \varphi} - \frac{2B}{r^2} \frac{\partial \Phi_2^*}{\partial \varphi} \right); \\ \sigma_\varphi &= [\lambda(B+1) + 2\mu B] \frac{\partial}{\partial \varphi} \nabla^2 \Phi_2^* + 2\mu \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 \Phi_2^*}{\partial \varphi^3} - \frac{(2B-1)}{r} \frac{\partial^2 \Phi_2^*}{\partial r \partial \varphi} + \frac{2B}{r^2} \frac{\partial \Phi_2^*}{\partial \varphi} \right]; \\ \sigma_z &= \lambda(B+1) \frac{\partial}{\partial \varphi} \nabla^2 \Phi_2^* + 2\mu \frac{\partial^3 \Phi_2^*}{\partial \varphi \partial z^2}; \\ \tau_{r\varphi} &= \mu \left[Br \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \Phi_2^* + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 \Phi_2^*}{\partial r \partial \varphi^2} + \frac{2(B-1)}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_2^*}{\partial \varphi^2} - 2B \frac{\partial^2 \Phi_2^*}{\partial r^2} + \frac{2B}{r} \frac{\partial \Phi_2^*}{\partial r} \right]. \end{aligned}$$

Продолжение формулы на следующей странице

$$\tau_{rz} = 2\mu \left(\frac{\partial^3 \Phi_2^*}{\partial r \partial \varphi \partial z} + \frac{B}{r} \frac{\partial^2 \Phi_2^*}{\partial \varphi \partial z} \right);$$

$$\tau_{\varphi z} = \mu \left(Br \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \Phi_2^* + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 \Phi_2^*}{\partial \varphi^2 \partial z} - 2B \frac{\partial^2 \Phi_2^*}{\partial r \partial z} \right).$$

А через перемещения (2.4), как:

$$\sigma_r = [\lambda(B+1) + 2\mu B] r \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \Phi_3 + 2\mu B \nabla^2 \Phi_3 - 2\lambda(B+1) \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial z^2} +$$

$$+ 2\mu \left(r \frac{\partial^3 \Phi_3}{\partial r^3} - 2B \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial r^2} \right);$$

$$\sigma_\varphi = \lambda(B+1) r \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \Phi_3 + 2\mu B \nabla^2 \Phi_3 - 2\lambda(B+1) \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial z^2} + 2\mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^3 \Phi_3}{\partial r \partial \varphi^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{2(B+1)}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial r^2} - \frac{2(B+1)}{r} \frac{\partial \Phi_3}{\partial r} \right];$$

$$\sigma_z = \lambda(B+1) r \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \Phi_3 - [(2B+1)(4\mu+1) + 1] \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial z^2} + 2\mu r \frac{\partial^3 \Phi_3}{\partial r \partial z^2};$$

$$\tau_{r\varphi} = \mu \left[B \frac{\partial}{\partial \varphi} \nabla^2 \Phi_3 + 2 \frac{\partial^3 \Phi_3}{\partial r^2 \partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial r \partial \varphi} + \frac{4(B+1)}{r^2} \frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi} \right];$$

$$\tau_{rz} = 2\mu \left[r \frac{\partial^3 \Phi_3}{\partial r^2 \partial z} - (3B+1) \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial r \partial z} \right];$$

$$\tau_{\varphi z} = 2\mu \left[\frac{\partial^3 \Phi_3}{\partial r \partial \varphi \partial z} - \frac{(3B+2)}{r} \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial z \partial \varphi} \right].$$

Список литературы

1. Тер-Мкртчян Л.Н. Осесимметричная задача теории упругости. Научные труды Ленинград. лесотехнич. академии. Вып. 96, 1961.
2. Ляв А. Математическая теория упругости. М.: ОНТИ. 1935.
3. Папкович П.Ф. Теория упругости. –М.: Оборонгиз, 1939.
4. Галеркин Б.Г.- Доклады АН СССР. - 1931.- № 10.
5. Вебер С. *Zeitschrift für angew Mathematik und Mechanik*, Bd.V, Heft 6.
6. Лейбензон Л.С. Курс теории упругости.- М.: Гостехиздат, 1947.
7. Блох Б.И. О представлении общего решения основных уравнений статической задачи теории упругости изотропного тела при помощи гармонических функций.// Прикладная математика и механика. Т. 22, 1958.
8. Слободянский М.Г. Об общих и полных формах решений уравнений упругости. Прикладная математика и механика. Т. 23, 1959.
9. Лауфер М.Я. Об одном решении уравнений статической теории упругости. ДР-3463. //Сборник рефератов ДР. М.: ВИМИ, вып. 3-5 1993.

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ТОЛСТЫХ СЕГМЕНТНЫХ ПЛАСТИНАХ, ВЫЗЫВАЕМЫЕ ДВУХМЕРНЫМ СТАЦИОНАРНЫМ ТЕМПЕРАТУРНЫМ ПОЛЕМ

Плоская температурная задача теории упругости достаточно подробно исследована в работе [3] и др. Тем не менее, приложение её результатов для определения напряженного состояния в телах сегментной формы путём непосредственного перехода от прямоугольных координат к полярным невозможно вследствие неопределенности отдельных компонентов тензора напряжения.

В работе показана недостаточность существующего решения термоэластичных уравнений Дюгамеля-Неймана, составленного путём комбинации компонентов термоупругого потенциала напряжения и функции напряжения Эри при определении напряженного состояния в сегментных телах в общем случае плоского стационарного температурного поля.

Представленное при этом более общее решение этих уравнений в виде линейной комбинации компонентов термоупругого потенциала перемещения и двух независимых функций перемещения единственным образом определяет плоское деформированное состояние в указанных формах при достаточно общих граничных условиях.

При определении термоупругого потенциала перемещения применен обобщенный - способ Фурье, частичное обоснование которого проведено на примере решения уравнения $\nabla^2 \Phi = 0$. Определившиеся при этом ряды отличаются от обычных рядов Фурье наличием неперiodических членов. Показана возможность представления произвольной достаточно гладкой функции этими новыми рядами, а также возможность формального оперирования с ними.

§1. Постановка задачи

Определим термоупругие напряжения в однородном изотропном элементе толщиной "H", имеющем сегментную форму (см. рис. 1).

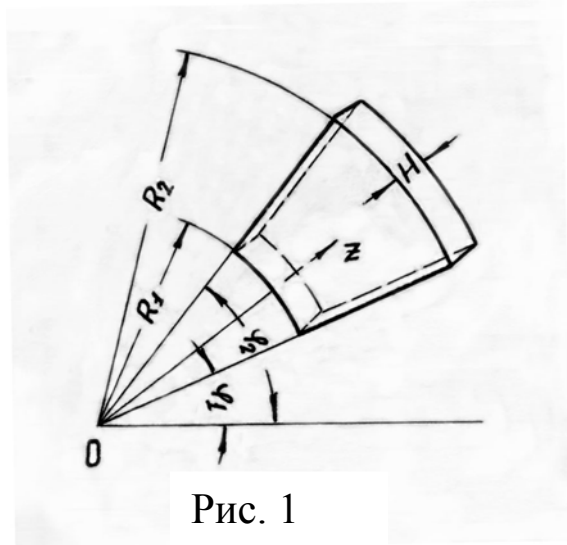


Рис. 1

Примем, что температурное поле элемента стационарно и зависит лишь от координат r и φ и не зависит от z .

Поместим начало координат в т. 0 и зададимся следующими условиями:

1. Внутри и на поверхности элемента известен закон распределения температуры $T = f(r, \varphi)$. В дальнейшем в отношении произвольной функции $f(r, \varphi)$ будут установлены некоторые ограничения.

2. Все поверхности элемента свободны от действия внешних сил.

3. Массовые силы пренебрежимо малы.

В этом случае поле перемещений внутри и на границе тела описывается дифференциальными уравнениями Дюгамеля-Неймана.

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial r} - \mu \frac{U}{r^2} + \mu \nabla^2 U - \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \varphi} &= \beta \frac{\partial T}{\partial r} \\ \frac{(\lambda + \mu)}{r} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi} - \mu \frac{V}{r^2} + \mu \nabla^2 V + \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \varphi} &= \frac{\beta}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \\ \Delta &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rU) + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \end{aligned} \right\}, \quad (1.1)$$

где U и V - перемещения соответственно вдоль осей r и φ .

λ и μ коэффициенты Ламе и Пуассона.

β - коэффициент температурной деформации в обозначениях А. Лява [1].

Будем искать нетривиальное решение этих уравнений, удовлетворяющее указанным ранее граничным условиям, которые могут быть переписаны так:

1. $r = R_1$; $\sigma_r = 0$; $\tau_{r\varphi} = 0$.
2. $r = R_2$; $\sigma_r = 0$; $\tau_{r\varphi} = 0$.
3. $\varphi = \varphi_1$; $\int_{R_1}^{R_2} \sigma_\varphi dr = 0$; $\int_{R_1}^{R_2} \sigma_\varphi r dr = 0$; $\int_{R_1}^{R_2} \tau_{r\varphi} dr = 0$.
4. $\varphi = \varphi_2$; $\int_{R_1}^{R_2} \sigma_\varphi dr = 0$; $\int_{R_1}^{R_2} \sigma_\varphi r dr = 0$; $\int_{R_1}^{R_2} \tau_{r\varphi} dr = 0$.

При определении граничных значений напряжений на радиальных поверхностях используется принцип Сен-Венана.

§2. Обобщённый способ Фурье. Ряды с непериодическими членами и их обоснование

В отличие от существующего способа будем искать частное решение вспомогательного уравнения

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (2.1)$$

В виде суммы

$$\Phi = f_1(r)\theta(\varphi) + f_2(\varphi)R(r), \quad (2.2)$$

где $R(r)$, $f_1(r)$ и $\theta(\varphi)$, $f_2(\varphi)$ - функции, зависящие соответственно от одной переменной r или φ . Подставляя (2.2) в (2.1) и преобразовывая, имеем

$$r^2 \frac{f_1''}{R} + r \frac{f_1'}{R} + \frac{f_1}{R} \frac{\theta''}{\theta} = -\frac{f_2}{\theta} \left(r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} \right) - \frac{f_2''}{\theta}. \quad (2.3)$$

Поскольку свойства функций R и θ оставались произвольными, наложим на них следующие два ограничения

$$\frac{\theta''}{\theta} = -n^2; \quad r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} = n^2,$$

где n - постоянная, которая аналогична требованию, чтобы

$$R\theta = (C_{1,n}^* r^n + C_{2,n}^* r^{-n})(C_{3,n}^* \cos n\varphi + C_{4,n}^* \sin n\varphi) \quad (2.4)$$

являлось решением (2.1). Т.о. левая часть (2.3) зависит только от r и не зависит от φ , а правая – наоборот, следовательно,

$$\begin{aligned} r^2 \frac{f_1''}{R} + r \frac{f_1'}{R} - n^2 \frac{f_1}{R} &= m \\ n^2 \frac{f_2}{\theta} + \frac{f_2''}{\theta} &= -m \end{aligned} \quad (2.5)$$

где m также постоянная.

Методом вариации постоянных находим

$$\begin{aligned} f_1 &= C_{1,n}^{**} r^n \ln r - C_{2,n}^{**} r^{-n} \ln r + C_{5,n}^* r^n + C_{6,n}^* r^{-n} \\ f_2 &= C_{7,n}^* \cos n\varphi + C_{8,n}^* \sin n\varphi + C_{4,n}^{**} \varphi \cos n\varphi - C_{3,n}^{**} \varphi \sin n\varphi \end{aligned}$$

Тогда частное решение уравнения (2.1) окончательно принимает вид

$$\begin{aligned} \Phi_i &= (C_{1,n_i} r^{n_i} + C_{2,n_i} r^{-n_i} + C_{3,n_i} r^{n_i} \ln r + C_{4,n_i} r^{-n_i} \ln r) \cos n_i \varphi + (C_{5,n_i} r^{n_i} + \\ &+ C_{6,n_i} r^{-n_i} + C_{7,n_i} r^{n_i} \ln r + C_{8,n_i} r^{-n_i} \ln r) \sin n_i \varphi + (C_{7,n_i} r^{n_i} - C_{8,n_i} r^{-n_i}) \varphi * \\ &* \cos n_i \varphi + (-C_{3,n_i} r^{n_i} + C_{4,n_i} r^{-n_i}) \varphi \sin n_i \varphi, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $C_{1,n_i}, C_{2,n_i}, C_{3,n_i}, C_{4,n_i}, C_{5,n_i}, C_{6,n_i}, C_{7,n_i}$ и C_{8,n_i} - постоянные, определяемые из граничных условий.

Естественно предположить, что, как и в случае (2.4), чисел n_i может быть бесконечно много. При этом для нас будут представлять интерес только вещественные из них. Поэтому в качестве решения можно рассмотреть ряд

$$\Phi = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i,$$

который при некоторых условиях равномерно сходится к обобщенному решению Φ уравнения (2.1).

Особенностью решения (2.6) является восемь постоянных интегрирования вместо обычных четырёх, вследствие наличия в нём непериодических членов вида $r^{\pm n_i} \varphi \cos n_i \varphi$ и $r^{\pm n_i} \varphi \sin n_i \varphi$, а так же членов вида $r^{\pm n_i} \ln r \cos n_i \varphi$ и $r^{\pm n_i} \ln r \sin n_i \varphi$, которые не являются в отдельности решениями (2.1). Функции, обладающие этими свойствами, назовём псевдогармоническими. Не останавливаясь на подробном анализе полученного результата, докажем следующие две теоремы.

Теорема 1

Фундаментальные функции вида f_2 , удовлетворяющие при $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$ граничным условиям $\alpha f_2' + \beta f_2 = 0$, где α и β - постоянные, обладают свойством обобщенной ортогональности, т.е.

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2i} f_{2j} d\varphi = 0 \text{ при } i \neq j.$$

Действительно по построению своему, функции f_2 удовлетворяют уравнению (2.5), если заменить в нём n^2 на n_i^2 и n_j^2 , а m на m_i и m_j . Тогда

$$\left. \begin{aligned} f_{2i}'' + n_i^2 f_{2i} + m_i \theta_i &= 0 \\ f_{2j}'' + n_j^2 f_{2j} + m_j \theta_j &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (2.7)$$

Умножим первое уравнение на θ_j , а второе на θ_i и вычтем почленно одно из другого. Интегрируя затем полученное выражение по промежутку (φ_1, φ_2) , находим:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (f_{2i}'' \theta_j - \theta_i f_{2j}'') d\varphi + n_i^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2i} \theta_j d\varphi - n_j^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2j} \theta_i d\varphi + (m_i - m_j) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \theta_i \theta_j d\varphi = 0.$$

Берём первый интеграл по частям дважды

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2i}'' \theta_j d\varphi = (f_{2i}' \theta_j - f_{2i} \theta_j')_{\varphi_1}^{\varphi_2} - n_j^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2i} \theta_j d\varphi.$$

Производя точно такие же действия со вторым интегралом и подставляя полученные результаты в исходное равенство, имеем

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \theta_i f_{2j} d\varphi + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2i} \theta_j d\varphi &= -\frac{1}{n_i^2 - n_j^2} [(f_{2i}' \theta_j - f_{2i} \theta_j')_{\varphi_1}^{\varphi_2} + (f_{2j}' \theta_i - f_{2j} \theta_i')_{\varphi_1}^{\varphi_2} + \\ &+ (m_i - m_j) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \theta_i \theta_j d\varphi]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Умножим далее первое уравнение (2.7) на f_{2j}'' , а второе на f_{2i}'' и вычтем почленно одно из другого. Интегрируя полученное выражение, как и ранее по промежутку (φ_1, φ_2) , находим

$$n_i^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2i} f_{2j}'' d\varphi - n_j^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2j} f_{2i}'' d\varphi + m_i \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \theta_i f_{2j}'' d\varphi - m_j \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \theta_j f_{2i}'' d\varphi = 0.$$

Берём третий и четвёртый интегралы по частям дважды. После уже известных преобразований, получаем:

$$\begin{aligned} m_i n_i^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2j} \theta_i d\varphi - m_j n_j^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2i} \theta_j d\varphi &= \\ &= n_i^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2i} f_{2j}'' d\varphi - n_j^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2j} f_{2i}'' d\varphi + [m_i (f_{2j}' \theta_i - f_{2j} \theta_i') + m_j (f_{2i}' \theta_j - f_{2i} \theta_j')]_{\varphi_1}^{\varphi_2}. \end{aligned}$$

Умножим затем первое уравнение (2.7) на $n_j^2 f_{2j}$, а второе на $n_i^2 f_{2i}$. Проведя аналогичные предыдущим преобразования, приходим к следующему выражению

$$m_i n_j^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \theta_i f_{2j} d\varphi - m_j n_i^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \theta_j f_{2i} d\varphi = n_i^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2i} f_{2j}'' d\varphi - n_j^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2j} f_{2i}'' d\varphi.$$

Исключая из последних двух равенств слагаемое

$$n_i^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2i} f_{2j}'' d\varphi - n_j^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2j} f_{2i}'' d\varphi,$$

получаем

$$m_i \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2j} \theta_i d\varphi + m_j \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2i} \theta_j d\varphi = \frac{1}{n_i^2 - n_j^2} [m_i (f_{2j}' \theta_i - f_{2j} \theta_i') + m_j (f_{2i}' \theta_j - f_{2i} \theta_j')]_{\varphi_1}^{\varphi_2} \quad (2.9)$$

Наконец умножим первое уравнение (2.7) на f_{2j} , а второе на f_{2i} .

Повторяя проделанную выше последовательность действий, имеем

$$m_i \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \theta_i f_{2j} d\varphi - m_i \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2i} \theta_j d\varphi = -(n_i^2 - n_j^2) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2i} f_{2j} d\varphi - (f_{2i}' f_{2j} - f_{2j}' f_{2i})_{\varphi_1}^{\varphi_2}. \quad (2.10)$$

Преобразуем (2.8) как

$$m_i \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \theta_i f_{2j} d\varphi = -m_i \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2i} \theta_j d\varphi - \frac{m_i}{n_i^2 - n_j^2} [(f_{2i}' \theta_j - f_{2i} \theta_j')_{\varphi_1}^{\varphi_2} + (f_{2j}' \theta_i - f_{2j} \theta_i')_{\varphi_1}^{\varphi_2} + (m_i - m_j) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \theta_i \theta_j d\varphi]$$

и подставим в (2.9)

$$(m_j - m_i) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2i} \theta_j d\varphi = \frac{1}{n_i^2 - n_j^2} [m_i (f_{2j}' \theta_i - f_{2j} \theta_i') + m_j (f_{2i}' \theta_j - f_{2i} \theta_j')]_{\varphi_1}^{\varphi_2} + \frac{m_i}{n_i^2 - n_j^2} \left[(f_{2i}' \theta_j - f_{2i} \theta_j')_{\varphi_1}^{\varphi_2} + (f_{2j}' \theta_i - f_{2j} \theta_i')_{\varphi_1}^{\varphi_2} + (m_i - m_j) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \theta_i \theta_j d\varphi \right],$$

а затем в (2.10)

$$-(m_j + m_i) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2i} \theta_j d\varphi = -(n_i^2 - n_j^2) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2i} f_{2j} d\varphi - (f_{2i}' f_{2j} - f_{2j}' f_{2i})_{\varphi_1}^{\varphi_2} + \frac{m_i}{n_i^2 - n_j^2} [(m_i - m_j) * \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \theta_i \theta_j d\varphi + (f_{2i}' \theta_j - f_{2i} \theta_j')_{\varphi_1}^{\varphi_2} + (f_{2j}' \theta_i - f_{2j} \theta_i')_{\varphi_1}^{\varphi_2}].$$

Исключая из последних двух выражений $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2i} \theta_j d\varphi$ и преобразовывая,

находим

$$(n_i^4 - n_j^4) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2i} f_{2j} d\varphi = -2m_i m_j \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \theta_i \theta_j d\varphi - [(n_i^2 - n_j^2)(f_{2i}' f_{2j} - f_{2j}' f_{2i}) + m_j (f_{2i}' \theta_j - f_{2i} \theta_j') - m_i (f_{2i}' \theta_j - f_{2j} \theta_i')]_{\varphi_1}^{\varphi_2}. \quad (2.11)$$

Согласно определения

$$\left. \begin{aligned} \alpha f_2'(\varphi_1) + \beta f_2(\varphi_1) &= 0 \\ \alpha f_2'(\varphi_2) + \beta f_2(\varphi_2) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (2.12)$$

Поскольку условию (2.12) должны удовлетворять все частные решения уравнения (2.1) то

$$\left. \begin{aligned} \alpha f'_{2i}(\varphi_1) + \beta f_{2i}(\varphi_1) &= 0 \\ \alpha f'_{2j}(\varphi_1) + \beta f_{2j}(\varphi_1) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (2.13)$$

Умножая первое уравнение (2.13) на $f_{2j}(\varphi_1)$, а второе на $f_{2i}(\varphi_1)$ и вычитая почленно одно из другого, получаем

$$f'_{2i}(\varphi_1)f_{2j}(\varphi_1) - f'_{2j}(\varphi_1)f_{2i}(\varphi_1) = 0.$$

Точно также находим

$$f'_{2i}(\varphi_2)f_{2j}(\varphi_2) - f'_{2j}(\varphi_2)f_{2i}(\varphi_2) = 0$$

По построению f_2

$$\left. \begin{aligned} \alpha \theta'_j(\varphi_1) + \beta \theta_j(\varphi_1) &= 0 \\ \alpha \theta'_i(\varphi_1) + \beta \theta_i(\varphi_1) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (2.14)$$

Умножая первое уравнение (2.13) на $\theta_j(\varphi_1)$ и первое уравнение (2.14) на $f_{2i}(\varphi_1)$ и преобразовывая уже известным образом, имеем

$$f'_{2i}(\varphi_1)\theta_j(\varphi_1) - \theta'_j(\varphi_1)f_{2i}(\varphi_1) = 0.$$

и аналогично

$$f'_{2i}(\varphi_2)\theta_j(\varphi_2) - \theta'_j(\varphi_2)f_{2i}(\varphi_2) = 0.$$

Производя подобные действия со вторыми уравнениями (2.13) и (2.14), легко определить, что

$$f_{2i}(\varphi_1)\theta'_i(\varphi_1) - f'_{2j}(\varphi_1)\theta_i(\varphi_1) = 0$$

и

$$f_{2i}(\varphi_2)\theta'_i(\varphi_2) - f'_{2j}(\varphi_2)\theta_i(\varphi_2) = 0.$$

Сравнивая полученные результаты с правой частью (2.11) и вспоминая, что, как известно, при рассматриваемых граничных условиях и $i \neq j$

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \theta_i \theta_j d\varphi = 0, \text{ получаем тем самым утверждение теоремы.}$$

Следствие

$$\text{При } i = j \quad \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2i} \theta_j d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2j} \theta_i d\varphi = 0 \quad \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_{2i}^* f_{2j}^* d\varphi = 0,$$

где $f_{2(i,j)}^* = C_{(i,j)} \varphi \text{Cos} n_{(i,j)} \varphi + d_{(i,j)} \varphi \text{Sinn}_{(i,j)} \varphi$, а $C_{(i,j)}$ и $d_{(i,j)}$ - произвольные постоянные.

Теорема 2

Произвольная достаточно гладкая функция $F(\varphi)$, удовлетворяющая граничным условиям (2.12), может быть представлена равномерно сходящимся рядом вида

$$F(\varphi) = \sum_{i=1}^{\infty} (A_i \text{Cos} n_i \varphi + B_i \text{Sinn}_i \varphi + C_i \varphi \text{Cos} n_i \varphi + d_i \varphi \text{Sinn}_i \varphi, \quad (2.15)$$

где n_i - всё возрастающая последовательность фундаментальных чисел $n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_i < \dots$, а A_i, B_i, C_i, d_i - постоянные, определяемые как

$$A_i = \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F_{(\varphi)} (\text{Cos} n_i \varphi + k_i \text{Sinn}_i \varphi) d\varphi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi^2 (\text{Cos} n_i \varphi + L_i \text{Sinn}_i \varphi)^2 d\varphi - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F_{(\varphi)} \varphi (\text{Cos} n_i \varphi + L_i \text{Sinn}_i \varphi) d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (\text{Cos} n_i \varphi + k_i \text{Sinn}_i \varphi)^2 d\varphi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi^2 (\text{Cos} n_i \varphi + L_i \text{Sinn}_i \varphi)^2 d\varphi -$$

$$\frac{* \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi (\text{Cos} n_i \varphi + L_i \text{Sinn}_i \varphi) (\text{Cos} n_i \varphi + k_i \text{Sinn}_i \varphi) d\varphi}{- \left[\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi (\text{Cos} n_i \varphi + L_i \text{Sinn}_i \varphi) (\text{Cos} n_i \varphi + k_i \text{Sinn}_i \varphi) d\varphi \right]^2}; \quad k_i = \frac{\alpha n_i \text{Sinn}_i \varphi_{(1,2)} - \beta \text{Cos} n_i \varphi_{(1,2)}}{\alpha n_i \text{Cos} n_i \varphi_{(1,2)} + \beta \text{Sinn}_i \varphi_{(1,2)}};$$

$$C_i = \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F_{(\varphi)} \varphi (\text{Cos} n_i \varphi + L_i \text{Sinn}_i \varphi) d\varphi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (\text{Cos} n_i \varphi + k_i \text{Sinn}_i \varphi)^2 d\varphi - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi (\text{Cos} n_i \varphi + L_i \text{Sinn}_i \varphi) *}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (\text{Cos} n_i \varphi + k_i \text{Sinn}_i \varphi)^2 d\varphi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi^2 (\text{Cos} n_i \varphi + L_i \text{Sinn}_i \varphi)^2 d\varphi -$$

$$\frac{* (\text{Cos} n_i \varphi + k_i \text{Sinn}_i \varphi) d\varphi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F_{(\varphi)} (\text{Cos} n_i \varphi + k_i \text{Sinn}_i \varphi) d\varphi}{- \left[\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi (\text{Cos} n_i \varphi + L_i \text{Sinn}_i \varphi) (\text{Cos} n_i \varphi + k_i \text{Sinn}_i \varphi) d\varphi \right]^2};$$

$$L_i = \frac{-\alpha n_i \text{Sinn}_i \varphi_{(1,2)} + \varphi_{(1,2)} (\alpha n_i \text{Sinn}_i \varphi_{(1,2)} - \beta \text{Cos} n_i \varphi_{(1,2)})}{\alpha \text{Sinn}_i \varphi_{(1,2)} + \varphi_{(1,2)} (\alpha n_i \text{Cos} n_i \varphi_{(1,2)} + \beta \text{Sinn}_i \varphi_{(1,2)})}; \quad B_i = k_i A_i; \quad d_i = L_i C_i$$

Рассмотрим ряд

$$F_{(\varphi)}^* = \sum_{i=1}^M [A_i (\text{Cos} n_i \varphi + k_i \text{Sinn}_i \varphi) + C_i \varphi (\text{Cos} n_i \varphi + L_i \text{Sinn}_i \varphi)], \quad (2.16)$$

в котором $B_i = k_i A_i$; $d_i = L_i C_i$. Функции, составляющие этот ряд, ограничены и интегрируемы в интервале (φ_1, φ_2) . Поэтому $F^*(\varphi)$, а следовательно, и $F(\varphi) - F^*(\varphi)$ можно рассматривать как функции с интегрируемым квадратом. Составим интеграл

$$\delta_i = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} [F(\varphi) - F^*(\varphi)]^2 d\varphi, \quad (2.17)$$

характеризующий среднеквадратичную ошибку приближения $F^*(\varphi)$ к $F(\varphi)$ в рассматриваемом интервале. Величина δ_i представляет функцию от параметров A_i и C_i . Поэтому наилучшее приближение $F^*(\varphi)$ и $F(\varphi)$ получится тогда, когда эти коэффициенты будут выбираться из условий

$$\frac{\partial \delta_i}{\partial A_i} = \dots = \frac{\partial \delta_i}{\partial C_i} = \dots = 0.$$

Дифференцируем δ_i по A_i

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \{F(\varphi) - \sum_{i=1}^M [A_i(\text{Cosn}_i\varphi + k_i\text{Sinn}_i\varphi) + C_i\varphi(\text{Cosn}_i\varphi + L_i\text{Sinn}_i\varphi)](\text{Cosn}_i\varphi + k_i\text{Sinn}_i\varphi)\} d\varphi = 0$$

и затем по C_i

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \{F(\varphi) - \sum_{i=1}^M [A_i(\text{Cosn}_i\varphi + k_i\text{Sinn}_i\varphi) + C_i\varphi(\text{Cosn}_i\varphi + L_i\text{Sinn}_i\varphi)]\varphi(\text{Cosn}_i\varphi + L_i\text{Sinn}_i\varphi)\} d\varphi = 0.$$

Принимая во внимание следствие теоремы 1 и решая совместно полученные уравнения относительно A_i и C_i , находим

$$\left. \begin{aligned} A_i &= \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F_{(\varphi)}(\text{Cosn}_i\varphi + k_i\text{Sinn}_i\varphi) d\varphi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi^2 (\text{Cosn}_i\varphi + L_i\text{Sinn}_i\varphi)^2 d\varphi - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F_{(\varphi)}\varphi(\text{Cosn}_i\varphi + L_i\text{Sinn}_i\varphi) d\varphi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (\text{Cosn}_i\varphi + k_i\text{Sinn}_i\varphi)^2 d\varphi -}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (\text{Cosn}_i\varphi + k_i\text{Sinn}_i\varphi)^2 d\varphi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi^2 (\text{Cosn}_i\varphi + L_i\text{Sinn}_i\varphi)^2 d\varphi -} \\ &\quad + \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi(\text{Cosn}_i\varphi + k_i\text{Sinn}_i\varphi)(\text{Cosn}_i\varphi + L_i\text{Sinn}_i\varphi) d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi(\text{Cosn}_i\varphi + L_i\text{Sinn}_i\varphi)(\text{Cosn}_i\varphi + k_i\text{Sinn}_i\varphi) d\varphi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi(\text{Cosn}_i\varphi + k_i\text{Sinn}_i\varphi)(\text{Cosn}_i\varphi + L_i\text{Sinn}_i\varphi) d\varphi - \\ &\quad - \left[\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi(\text{Cosn}_i\varphi + L_i\text{Sinn}_i\varphi)(\text{Cosn}_i\varphi + k_i\text{Sinn}_i\varphi) d\varphi \right]^2; \\ C_i &= \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F_{(\varphi)}\varphi(\text{Cosn}_i\varphi + L_i\text{Sinn}_i\varphi) d\varphi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (\text{Cosn}_i\varphi + k_i\text{Sinn}_i\varphi)^2 d\varphi - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi(\text{Cosn}_i\varphi + L_i\text{Sinn}_i\varphi) *}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (\text{Cosn}_i\varphi + k_i\text{Sinn}_i\varphi)^2 d\varphi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi^2 (\text{Cosn}_i\varphi + L_i\text{Sinn}_i\varphi)^2 d\varphi -} \\ &\quad * (\text{Cosn}_i\varphi + k_i\text{Sinn}_i\varphi) d\varphi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F_{(\varphi)}(\text{Cosn}_i\varphi + k_i\text{Sinn}_i\varphi) d\varphi \\ &\quad - \left[\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi(\text{Cosn}_i\varphi + L_i\text{Sinn}_i\varphi)(\text{Cosn}_i\varphi + k_i\text{Sinn}_i\varphi) d\varphi \right]^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Легко видеть, что найденные значения A_i и C_i , не только соответствуют минимуму δ_i , но и ограничены. Действительно, в точке минимума должно выполняться неравенство

$$\frac{\partial^2 \delta_i}{\partial A_i^2} \cdot \frac{\partial^2 \delta_i}{\partial C_i^2} - \left(\frac{\partial^2 \delta_i}{\partial A_i \partial C_i} \right)^2 = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (\text{Cosn}_i\varphi + k_i\text{Sinn}_i\varphi)^2 d\varphi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi^2 (\text{Cosn}_i\varphi + L_i\text{Sinn}_i\varphi)^2 d\varphi - \left[\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi(\text{Cosn}_i\varphi + L_i\text{Sinn}_i\varphi)(\text{Cosn}_i\varphi + k_i\text{Sinn}_i\varphi) d\varphi \right]^2 > 0.$$

Сравнивая полученное выражение с известным неравенством Буняковского, непосредственно убеждаемся в справедливости сделанного ранее утверждения, за исключением, может быть, одного случая, который не рассматривается. Покажем далее, что система функций вида f_2 обладает полнотой и ряд (2.16) сходится к $F_{(\varphi)}$ "в среднем", т.е. $\lim_{M \rightarrow \infty} \delta_i = 0$, что равносильно

$\lim_{n_i \rightarrow \infty} \delta_i = 0$. Предположим, что $F_{(\varphi)}$ непрерывно дифференцируемая функция,

удовлетворяющая граничным условиям (2.12). Введём обозначение

$$\rho_{(\varphi)} F_{M(\varphi)} = F_{(\varphi)} - \sum_{i=1}^M [A_i (\cos n_i \varphi + k_i \sin n_i \varphi) + C_i \varphi (\cos n_i + L_i \sin n_i \varphi)];$$

$$P_{M(\varphi)} = \frac{F_{M(\varphi)}}{\sqrt{\delta_i}},$$

где $\rho_{(\varphi)}$ подбирается так, чтобы $\rho_{(\varphi)}^2 F_{M(\varphi)} = 2\theta_i$.

Поставим задачу о нахождении минимума функционала

$$G_{(P_M)} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} [-P_{M(\varphi)}'^2 + n_i^2 P_{M(\varphi)}^2] d\varphi > 0$$

при определившемся дополнительном условии

$$H_{(P_M)} = 2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \theta_i P_{M(\varphi)} d\varphi = 1.$$

На основании теоремы Эйлера можно утверждать, что функции, дающие решение поставленной задачи, должны быть экстремалиями функционала [4]

$$G_{(P_M)} + m_i H_{(P_M)} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} [-P_{M(\varphi)}'^2 + n_i^2 P_{M(\varphi)}^2 + 2m_i \theta_i P_{M(\varphi)}] d\varphi,$$

для которого уравнение Эйлера

$$P_{M(\varphi)}'' + n_i^2 P_{M(\varphi)} = m_i \theta_i$$

в точности совпадает с уравнением (2.5).

Т.к. кроме того, $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} P_{M(\varphi)} f_{2i} d\varphi = 0$, где $i = 1, 2, 3, \dots, M$, и граничные условия

задачи о собственных значениях и рассматриваемой вариационной задачи также совпадают, то функция $P_{M(\varphi)}$, дающая минимум $G_{(P_M)}$ при условии $H_{(P_M)} = 1$, является фундаментальной. Поэтому всегда $G_{(P_M)} \geq m_{M+1}$. Вычислим $G_{(P_M)}$, переходя к ранее принятым обозначениям

$$G_{(P_M)} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} [-P_{M(\varphi)}'^2 + n_i^2 P_{M(\varphi)}^2] d\varphi = \frac{1}{\delta_i} \left\{ G_{[F_{(\varphi)}]} - 2G_{[F_{(\varphi)}, F_{(\varphi)}^*]} + G_{[F_{(\varphi)}^*]} \right\} \geq m_{M+1}.$$

Откуда получаем

$$\delta_i \leq \frac{G_{[F_{(\varphi)}]} - 2G_{[F_{(\varphi)}, F_{(\varphi)}^*]} + G_{[F_{(\varphi)}^*]}}{m_{M+1}}.$$

Т.к. числитель правой части этого неравенства, возрастая с возрастанием M , остается все же ограниченным по отношению к возрастанию m , то при любом сколь угодно большом M , а следовательно и n , всегда можно подобрать такое $m > M$, что δ_i станет меньше любого наперед заданного положительного числа ε . Следовательно, $\lim_{M \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty} \delta_i = 0$. Интересно отметить, что из последнего

неравенства вытекает зависимость m от n .

Умножая обе части ряда (2.15) отдельно на $A_j \cos n_j \varphi + B_j \sin n_j \varphi$, а затем на $\varphi(\cos n_j \varphi \cdot C_j + d_j \sin n_j \varphi)$ и интегрируя (по доказанному система рассматриваемых функций обладает полнотой) их по промежутку (φ_1, φ_2) после преобразований, с учетом теоремы 1 и её следствия, получаем

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F_{(\varphi)}(\cos n_i \varphi + k_i \sin n_i \varphi) d\varphi = A_i \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (\cos n_i \varphi + k_i \sin n_i \varphi) d\varphi + C_i \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi(\cos n_i \varphi + L_i \sin n_i \varphi)(\cos n_i \varphi + k_i \sin n_i \varphi) d\varphi$$

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F_{(\varphi)} \varphi(\cos n_i \varphi + L_i \sin n_i \varphi) d\varphi = A_i \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi(\cos n_i \varphi + L_i \sin n_i \varphi)(\cos n_i \varphi + k_i \sin n_i \varphi) d\varphi + C_i \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi^2 (\cos n_i \varphi + L_i \sin n_i \varphi)^2 d\varphi$$

Решая эти уравнения совместно относительно A_i и C_i , находим их значения, которые в точности совпадают с (2.18). Полученный результат говорит о том, что коэффициенты (2.18), найденные для $i = M$, остаются неизменными при увеличении числа членов ряда (2.15). Чтобы освободиться от ранее принятого ограничения непрерывной дифференцируемости функции $F_{(\varphi)}$, достаточно показать, что для всякой достаточно гладкой функции $F_{(\varphi)}$ существует непрерывно дифференцируемая функция $f_{(\varphi)}$, удовлетворяющая граничным условиям (2.12) и такая, что $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} [F_{(\varphi)} - f_{(\varphi)}]^2 d\varphi < \varepsilon$, где ε - любое

заданное положительное число. Не приводя доказательства последнего, которое аналогично изложенному в [5], покажем, что ряд (2.15) сходится к $F_{(\varphi)}$ равномерно. При этом достаточно показать, что ряд (2.15) вообще равномерно сходится. Действительно, т.к. этот ряд сходится "в среднем" к $F_{(\varphi)}$, то, сходясь равномерно, он не может иметь своим пределом никакую другую функцию.

Как показано ранее для (2.17) всегда можно подобрать такое M , не зависящее от φ , что, если коэффициенты ряда (2.16) суть (2.18), то при $n_i > M$ для всех значений φ в промежутке (φ_1, φ_2) имеет место неравенство

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} [F_{(\varphi)} - F_{(\varphi)}^*]^2 d\varphi < \varepsilon^*, \text{ где } 0 < \varphi_1 < \varphi_2 \text{ и } \varepsilon^* > 0. \text{ Полагая } \varepsilon^* = \varepsilon \left| \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F_{(\varphi)} d\varphi \right|, \varepsilon > 0 \text{ и считая, как и}$$

ранее, k_i и L_i ограниченными, после подстановки (2.18) в (2.17) с учётом теоремы 1, получаем

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left\{ F_{(\varphi)} - \sum_{i=1}^M [A_i (\cos n_i \varphi + k_i \sin n_i \varphi) + C_i \varphi (\cos n_i \varphi + L_i \sin n_i \varphi)] \right\}^2 d\varphi =$$

$$= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F_{(\varphi)}^2 d\varphi - \sum_{i=1}^M [A_i \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (\cos n_i \varphi + k_i \sin n_i \varphi) d\varphi + C_i \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi (\cos n_i \varphi + L_i \sin n_i \varphi) d\varphi] =$$

$$= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F_{(\varphi)} [F_{(\varphi)} - F_{(\varphi)}^*] d\varphi < \varepsilon \left| \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F_{(\varphi)} d\varphi \right|,$$

откуда сразу следует $|F_{(\varphi)} - F_{(\varphi)}^*| < \varepsilon$.

Осталось показать, что коэффициенты k_i и L_i действительно ограничены. Последние определяются из граничных условий (2.12) как

$$k_i = \frac{\alpha n_i \text{Sinn}_i \varphi_{(1,2)} - \beta \text{Cosn}_i \varphi_{(1,2)}}{\alpha n_i \text{Cosn}_i \varphi_{(1,2)} + \beta \text{Sinn}_i \varphi_{(1,2)}},$$

$$L_i = \frac{-\alpha \text{Cosn}_i \varphi_{(1,2)} + \varphi_{(1,2)} (\alpha n_i \text{Sinn}_i \varphi_{(1,2)} - \beta \text{Cosn}_i \varphi_{(1,2)})}{\alpha \text{Sinn}_i \varphi_{(1,2)} + \varphi_{(1,2)} (\alpha n_i \text{Cosn}_i \varphi_{(1,2)} + \beta \text{Sinn}_i \varphi_{(1,2)})},$$

где $n_i \neq 0$ и не совпадает с корнями уравнений

$$\alpha n_i \text{Cosn}_i \varphi_{(1,2)} + \beta \text{Sinn}_i \varphi_{(1,2)} = 0$$

$$\alpha n_i \text{Sinn}_i \varphi_{(1,2)} + \varphi_{(1,2)} (\alpha n_i \text{Cosn}_i \varphi_{(1,2)} + \beta \text{Sinn}_i \varphi_{(1,2)}) = 0$$

Из выражений k_i и L_i видно, что при неограниченном возрастании n_i , последние остаются ограниченными. Оставшиеся неизвестными коэффициенты ряда (2.15) определяются как

$$B_i = k_i A_i \quad d_i = L_i C_i$$

Т.о. теорема доказана. Не выявляя дальнейших отличий ряда (2.15) и обычного ряда Фурье, представляющих решение уравнения (2.1), ограничимся определившейся возможностью формального оперирования с этим рядом.

§3. Термоупругий потенциал перемещения

Решение уравнений (1.1) ищем в виде линейной комбинации трех независимых функций $\Phi_m(r, \varphi)$, $m = 0 \div 2$. Первая из них Φ_0 , называемая в дальнейшем термоупругим потенциалом перемещения, образует частное решение системы (1.1). Две остальные - суть независимые решения уравнений Ламе. Полагая

$$\left. \begin{aligned} U_0 &= \frac{\beta}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} \\ V_0 &= \frac{\beta}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

и подставляя в (1.1), получаем

$$\nabla^2 \Phi_0 = f(r, \varphi) \quad (3.2)$$

Считая в дальнейшем функцию $f(r, \varphi)$ гармонической в целом и беря операцию ∇^2 от обеих частей равенства (3.2), находим

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi_0 = 0.$$

Т.о. функция Φ_0 является бигармонической функцией. Вследствие наложенных выше на $f(r, \varphi)$ ограничений, а также учитывая результаты § 2, можно полагать, что она представима сходящимся рядом вида

$$f(r, \varphi) = \sum_{i=1}^{\infty} [(C_{1,n_i} r^{v_{n_i}} + C_{2,n_i} r^{-v_{n_i}} + C_{3,n_i} r^{v_{n_i}} \ln r + C_{4,n_i} r^{-v_{n_i}} \ln r) * \\ * \text{Cos} v_{n_i} \varphi + (C_{5,n_i} r^{v_{n_i}} + C_{6,n_i} r^{-v_{n_i}} + C_{7,n_i} r^{v_{n_i}} \ln r + C_{8,n_i} r^{-v_{n_i}} \ln r) \text{Sin} v_{n_i} \varphi + \\ + (C_{7,n_i} r^{v_{n_i}} - C_{8,n_i} r^{-v_{n_i}}) \varphi \text{Cos} v_{n_i} \varphi + (-C_{3,n_i} r^{v_{n_i}} + C_{4,n_i} r^{-v_{n_i}}) \varphi \text{Sin} v_{n_i} \varphi].$$

Введём обозначения

$$r^{v_{n_i}} \ln r = R_1 \quad C_{3,n_i} \text{Cos} v_{n_i} \varphi + C_{7,n_i} \text{Sin} v_{n_i} \varphi = \theta_1;$$

$$r^{-v_{n_i}} \ln r = R_2 \quad C_{4,n_i} \text{Cos} v_{n_i} \varphi + C_{8,n_i} \text{Sin} v_{n_i} \varphi = \theta_2;$$

$$r^{v_{n_i}} = R_3 \quad \varphi(C_{7,n_i} \text{Cos} v_{n_i} \varphi - C_{3,n_i} \text{Sin} v_{n_i} \varphi) = \theta_3;$$

$$r^{-v_{n_i}} = R_4 \quad \varphi(-C_{8,n_i} \text{Cos} v_{n_i} \varphi + C_{4,n_i} \text{Sin} v_{n_i} \varphi) = \theta_4;$$

$$C_{1,n_i} \text{Cos} v_{n_i} \varphi + C_{5,n_i} \text{Sin} v_{n_i} \varphi = \theta_5;$$

$$C_{2,n_i} \text{Cos} v_{n_i} \varphi + C_{6,n_i} \text{Sin} v_{n_i} \varphi = \theta_6.$$

Тогда (3.2) представится как

$$\nabla^2 \Phi_{0i} = R_4 \theta_5 + R_3 \theta_6 + R_1 \theta_1 + R_2 \theta_2 + R_3 \theta_3 + R_4 \theta_4.$$

Решение этого уравнения по обобщенному способу Фурье в виде

$$\begin{aligned} \Phi_{0i} = & f_{2(r)} \theta_5 + R_4 f_{7(\varphi)} + f_{4(r)} \theta_6 + f_{8(\varphi)} R_3 + f_{1(r)} \theta_1 + f_{3(r)} \theta_2 + \\ & + r^2 R_3 f_{5(\varphi)} + r^2 R_4 f_{6(\varphi)}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $f_{1(r)}, f_{2(r)}, f_{3(r)}, f_{4(r)}, f_{5(r)}, f_{6(r)}, f_{7(r)}, f_{8(r)}$ пока произвольные функции, зависящие соответственно только от r и φ .

Подставляя (3.3) в последнее уравнение, после преобразований получаем:

$$\begin{aligned} & \theta_5 \left[f_{2(r)}'' + \frac{1}{r} f_{2(r)}' - \frac{v_{n_i}^2}{r^2} f_{2(r)} - R_4 \right] + \theta_6 \left[f_{4(r)}'' + \frac{1}{r} f_{4(r)}' - \frac{v_{n_i}^2}{r^2} f_{4(r)} - R_3 \right] + \\ & + \theta_1 \left[f_{1(r)}'' + \frac{1}{r} f_{1(r)}' - \frac{v_{n_i}^2}{r^2} f_{1(r)} - R_1 \right] + \theta_2 \left[f_{3(r)}'' + \frac{1}{r} f_{3(r)}' - \frac{v_{n_i}^2}{r^2} f_{3(r)} - R_2 \right] + \\ & + \frac{1}{r^2} R_4 [v_{n_i}^2 f_{7(\varphi)} + f_{7(\varphi)}''] + \frac{1}{r^2} R_3 [v_{n_i}^2 f_{8(\varphi)} + f_{8(\varphi)}''] + \\ & + R_4 [(v_{n_i} - 2)^2 f_{6(\varphi)} + f_{6(\varphi)}'' - \theta_4] + R_3 [(v_{n_i} + 2)^2 f_{5(\varphi)} + f_{5(\varphi)}'' - \theta_3] = 0, \end{aligned}$$

откуда следует

$$f_{2(r)}'' + \frac{1}{r} f_{2(r)}' - \frac{v_{n_i}^2}{r^2} f_{2(r)} = R_4;$$

$$f_{4(r)}'' + \frac{1}{r} f_{4(r)}' - \frac{v_{n_i}^2}{r^2} f_{4(r)} = R_3;$$

$$f_{1(r)}'' + \frac{1}{r} f_{1(r)}' - \frac{v_{n_i}^2}{r^2} f_{1(r)} = R_1;$$

$$f_{3(r)}'' + \frac{1}{r} f_{3(r)}' - \frac{v_{n_i}^2}{r^2} f_{3(r)} = R_2;$$

$$f_{7(\varphi)}'' + v_{n_i}^2 f_{7(\varphi)} = 0;$$

$$f_{8(\varphi)}'' + v_{n_i}^2 f_{8(\varphi)} = 0;$$

$$f_{6(\varphi)}'' + (v_{n_i} - 2)^2 f_{6(\varphi)} = \theta_4;$$

$$f_{5(\varphi)}'' + (v_{n_i} + 2)^2 f_{5(\varphi)} = \theta_3.$$

Применяя метод вариации постоянных при интегрировании последних уравнений с правой частью, получаем окончательное выражение для термоупругого потенциала перемещения в виде

$$\begin{aligned} \Phi_0 = & \sum_{i=1}^{\infty} [(a_{0,1}r^{v_{n_i}} + a_{0,2}r^{-v_{n_i}} + a_{0,3}r^{v_{n_i}+2} + a_{0,4}r^{-v_{n_i}+2} + a_{0,5}r^{v_{n_i}} \ln r + a_{0,6}r^{-v_{n_i}} \ln r + \\ & + a_{0,7}r^{v_{n_i}+2} \ln r + a_{0,8}r^{-v_{n_i}+2} \ln r) \cos v_{n_i} \varphi + (a_{0,9}r^{v_{n_i}} + a_{0,10}r^{-v_{n_i}} + a_{0,11}r^{v_{n_i}+2} + \\ & + a_{0,12}r^{-v_{n_i}+2} + a_{0,13}r^{v_{n_i}} \ln r + a_{0,14}r^{-v_{n_i}} \ln r + a_{0,15}r^{v_{n_i}+2} \ln r + a_{0,16}r^{-v_{n_i}+2} \ln r) \sin v_{n_i} \varphi + \\ & + (a_{0,13}r^{v_{n_i}} - a_{0,14}r^{-v_{n_i}} + a_{0,15}r^{v_{n_i}+2} - a_{0,16}r^{-v_{n_i}+2}) \varphi \cos v_{n_i} \varphi + (-a_{0,5}r^{v_{n_i}} + a_{0,6}r^{-v_{n_i}} - \\ & - a_{0,7}r^{v_{n_i}+2} + a_{0,8}r^{-v_{n_i}+2}) \varphi \sin v_{n_i} \varphi], \end{aligned} \quad (3.4)$$

где

$$\begin{aligned} a_{0,8} &= -\frac{C_{4,n_i}}{4(v_{n_i}-1)}; \quad a_{0,7} = -\frac{C_{3,n_i}}{4(v_{n_i}+1)}; \quad a_{0,15} = -\frac{C_{7,n_i}}{4(v_{n_i}+1)}; \quad a_{0,16} = -\frac{C_{8,n_i}}{4(v_{n_i}-1)}; \\ a_{0,3} &= -\frac{1}{4(v_{n_i}+1)} \left(C_{1,n_i} - \frac{C_{3,n_i}}{v_{n_i}+1} \right); \quad a_{0,4} = -\frac{1}{4(v_{n_i}-1)} \left(C_{2,n_i} + \frac{C_{4,n_i}}{v_{n_i}-1} \right); \\ a_{0,11} &= \frac{1}{4(v_{n_i}+1)} \left(C_{5,n_i} - \frac{C_{7,n_i}}{v_{n_i}+1} \right); \quad a_{0,12} = -\frac{1}{4(v_{n_i}-1)} \left(C_{6,n_i} + \frac{C_{8,n_i}}{v_{n_i}-1} \right); \end{aligned}$$

а $a_{0,1}, a_{0,2}, a_{0,5}, a_{0,6}, a_{0,9}, a_{0,10}, a_{0,13}, a_{0,14}$ - пока произвольные постоянные. Следует отметить, что для интегрирования (3.2) условие гармоничности функции $f(r, \varphi)$ в целом вовсе не обязательно. Оно принято здесь для упрощения выкладок.

В случае, если $f(r, \varphi)$ не может быть приведена к виду суммы произведений функций, зависящих лишь от одной переменной, для интегрирования уравнений (3.2) следует прибегнуть к методам теории потенциала при условии наложения на $f(r, \varphi)$ некоторых весьма общих ограничений.

Не останавливаясь на подробном разборе этих случаев, заметим только, что принятый характер распределения температуры в теле не умаляет общности проделанных ниже выводов.

§4. Интегрирование уравнений Ламе

Термоупругий потенциал перемещения (3.4) позволяет перейти от неоднородных уравнений (1.1) к системе однородных уравнений (4.1)

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial r} - \mu \frac{U}{r^2} + \mu \nabla^2 U - \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \varphi} &= 0 \\ \frac{(\lambda + \mu)}{r} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi} - \mu \frac{V}{r^2} + \mu \nabla^2 V + \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \varphi} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (4.1)$$

Следуя методу Б.Г. Галеркина, будем искать решение системы (4.1) в виде линейных комбинаций двух независимых функций перемещения [2]. Вследствие невозможности непосредственного преобразования этих

комбинаций от декартовых координат к полярным будем искать их в следующем виде:

Положим

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= Br\nabla^2\Phi_1 + r\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial r^2} - (2B+1)\frac{\partial\Phi_1}{\partial r} \\ V_1 &= \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial r\partial\varphi} - \frac{2(B+1)}{r}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi} \end{aligned} \right\}, \quad (4.2)$$

$$\text{где } B = -\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}$$

Подставляя (4.2) в систему (4.1), после сокращений имеем

$$\nabla^2\nabla^2\Phi_1 = 0.$$

Следовательно, Φ_1 - произвольная бигармоническая функция двух переменных r и φ , а (4.2) суть решение системы (4.1).

Полагаем далее

$$\left. \begin{aligned} U_2 &= \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial r\partial\varphi} + \frac{2B}{r}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\varphi} \\ V_2 &= Br\nabla^2\Phi_2 + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\varphi^2} - 2B\frac{\partial\Phi_2}{\partial r} \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Произведя подстановку (4.3) в систему (4.1), получаем

$$\nabla^2\nabla^2\Phi_2 = 0.$$

Следовательно, Φ_2 есть также произвольная бигармоническая функция двух переменных r и φ , независимая притом от Φ_1 , а система (4.3) суть решение системы (4.1). Каждую из Φ_m , $m=1, 2$ будем искать в форме, аналогичной (3.4), но с неопределёнными коэффициентами, т. е.

$$\begin{aligned} \Phi_m &= \sum_{i=1}^{\infty} [(a_{m,1}r^{v_{n_i}} + a_{m,2}r^{-v_{n_i}} + a_{m,3}r^{v_{n_i}+2} + a_{m,4}r^{-v_{n_i}+2} + a_{m,5}r^{v_{n_i}} \ln r + a_{m,6}r^{-v_{n_i}} \ln r + \\ &+ a_{m,7}r^{v_{n_i}+2} \ln r + a_{m,8}r^{-v_{n_i}+2} \ln r) \cos v_{n_i} \varphi + (a_{m,9}r^{v_{n_i}} + a_{m,10}r^{-v_{n_i}} + a_{m,11}r^{v_{n_i}+2} + \\ &+ a_{m,12}r^{-v_{n_i}+2} + a_{m,13}r^{v_{n_i}} \ln r + a_{m,14}r^{-v_{n_i}} \ln r + a_{m,15}r^{v_{n_i}+2} \ln r + a_{m,16}r^{-v_{n_i}+2} \ln r) * \\ &* \sin v_{n_i} \varphi + (a_{m,13}r^{v_{n_i}} - a_{m,14}r^{-v_{n_i}} + a_{m,15}r^{v_{n_i}+2} - a_{m,16}r^{-v_{n_i}+2}) \varphi \cos v_{n_i} \varphi + \\ &+ (-a_{m,5}r^{v_{n_i}} + a_{m,6}r^{-v_{n_i}} - a_{m,7}r^{v_{n_i}+2} + a_{m,8}r^{-v_{n_i}+2}) \varphi \sin v_{n_i} \varphi] \end{aligned}$$

§5. Термоупругие напряжения

Вследствие линейности (1.1), составим их обобщенное решение в виде суммы решений (3.1), (4.2) и (4.3)

$$\left. \begin{aligned} U &= \sum_{m=0}^2 U_m \\ V &= \sum_{m=0}^2 V_m \end{aligned} \right\}. \quad (5.1)$$

Легко проверить, что уравнения (5.1) помимо (1.1) удовлетворяют также и тождественным соотношениям Сен-Венана. Компоненты тензора напряжения запишутся при этом как:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\lambda\beta}{\lambda+2\mu} \nabla^2 \Phi_0 + \lambda(B+1) \left(r \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \Phi_1 + \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \Phi_2 \right) + \\ &+ 2\mu B \left(\nabla^2 \Phi_1 + r \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \Phi_1 \right) + 2\mu \left(\frac{\beta}{\lambda+2\mu} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial r^2} + r \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial r^3} - 2B \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial r^2 \partial \varphi} + \frac{2B}{r} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial r \partial \varphi} - \frac{2B}{r^2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} \right) - \beta T; \\ \sigma_\varphi &= \frac{\lambda\beta}{\lambda+2\mu} \nabla^2 \Phi_0 + \lambda(B+1) \left(r \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \Phi_1 + \frac{\partial}{\partial \varphi} \nabla^2 \Phi_2 \right) + \\ &+ 2\mu B \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \nabla^2 \Phi_2 + \nabla^2 \Phi_1 \right) + 2\mu \left[\frac{\beta}{\lambda+2\mu} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial r \partial \varphi^2} - \right. \\ &- \frac{2(B+1)}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial \varphi^3} - \frac{(2B-1)}{r} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\beta}{1+2\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} + \\ &+ \left. \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} - \frac{(2B+1)}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \frac{2B}{r^2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} \right] - \beta T; \\ \sigma_z &= \frac{\lambda\beta}{\lambda+2\mu} \nabla^2 \Phi_0 + \lambda(B+1) \left(r \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \Phi_1 + \frac{\partial}{\partial \varphi} \nabla^2 \Phi_2 \right) - \beta T; \\ \tau_{cp} &= \mu \left[\frac{\beta}{\lambda+2\mu} \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial r \partial \varphi} - \frac{\beta}{\lambda+2\mu} \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \varphi} + B \left(r \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \Phi_2 + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{\partial}{\partial \varphi} \nabla^2 \Phi_1 \right) + 2 \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial r^2 \partial \varphi} - \frac{4(B+1)}{r} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r \partial \varphi} + \frac{4(B+1)}{r^2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} + \\ &+ \left. 2 \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial r \partial \varphi^2} - 2B \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial r^2} + \frac{2(B-1)}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \varphi^2} + \frac{2B}{r} \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \right]; \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

Как видно из (5.2), компонент σ_z не исчезает, и только благодаря его наличию обеспечивается состояние плоской деформации. Применяя далее граничные условия, приведенные в §1, к уравнениям (5.2), находим, что

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= a_{2,1} = 0; & a_{1,6} &= a_{2,6} = 0; & a_{1,13} &= a_{2,13} = 0; & a_{2,15} &= -a_{1,7}; \\ a_{2,1} &= a_{2,2} = 0; & a_{1,5} &= a_{2,9} = 0; & a_{1,14} &= a_{2,14} = 0; \\ a_{1,5} &= a_{2,5} = 0; & a_{1,10} &= a_{2,10} = 0; & a_{1,15} &= a_{2,7} = 0. \end{aligned}$$

Остальные коэффициенты определяются из системы 22-х линейных уравнений относительно этих неизвестных коэффициентов единственным образом. Ввиду громоздкости их выражения, последние здесь не приводятся.

Легко видеть, что компоненты тензора напряжения, скомбинированные в виде суммы компонентов термоупругого потенциала напряжения и функции напряжений Эри, которые, как известно, могут быть представлены в форме:

$$\sigma_r = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left(F - \frac{2\mu\beta}{\lambda + 2\mu} \Phi_0 \right);$$

$$\sigma_\varphi = \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(F - \frac{2\mu\beta}{\lambda + 2\mu} \Phi_0 \right);$$

$$\sigma_z = \nabla^2 \left(\mu F - \frac{2\mu\beta}{\lambda + 2\mu} \Phi_0 \right);$$

$$\tau_{r\varphi} = -\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(F - \frac{2\mu\beta}{\lambda + 2\mu} \Phi_0 \right) \right]$$

не могут удовлетворить поставленным в §1 граничным условиям. Действительно, как следует из самого хода решения задачи в рассматриваемом случае температурного поля и граничных условий, качественный вид функции напряжений Эри должен полностью определяться видом функции, полученной для потенциала напряжения. Только при этом потребуется минимальное количество соотношений, связывающих неизвестные постоянные компоненты тензора напряжения для удовлетворения поставленных граничных условий. Поскольку это количество соотношений, как и ранее, остается равным 22-м и значительно превышает в этом случае число определяемых постоянных, непосредственно убеждаемся в правильности первоначального вывода.

Рассмотрим вариант, когда на границах тела приложены внешние силы, определяемые функциями двух независимых переменных r и φ .

В этом случае решение системы (1.1) должно быть представлено в виде суммы частного решения, удовлетворяющего нулевым граничным условиям, и решения, соответствующего этим внешним поверхностным силам. Последнее следует искать в виде:

$$U = Br \nabla^2 \bar{\Phi}_1 + r \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_1}{\partial r^2} - (2B + 1) \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_2}{\partial r \partial \varphi} + \frac{2B}{r} \frac{\partial \bar{\Phi}_2}{\partial \varphi};$$

$$V = Br \nabla^2 \bar{\Phi}_2 + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_2}{\partial \varphi^2} - 2B \frac{\partial \bar{\Phi}_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_1}{\partial r \partial \varphi} - \frac{(2B + 1)}{r} \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial \varphi};$$

$$\text{Где } \nabla^2 \nabla^2 \bar{\Phi}_{(1,2)} = 0$$

Форма $\bar{\Phi}_1$ и $\bar{\Phi}_2$, вообще говоря, уже может не совпадать с данной в (4.4) и будет определяться видом заданных внешних сил.

Список литературы

1. Ляв А. Математическая теория упругости. М.: ОНТИ, 1935.
2. Лейбензон Л.С. Курс теории упругости. М.: Гостехиздат, 1947.
3. Мелан Э. и Паркус Г. Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. М.: Физматгиз, 1958.
4. Курант Р. и Гильберт Д. Методы математической физики. Т.2.-М.: ГИТТЛ, 1935.
5. Толстов Г.П. Ряды Фурье. - М.: Физматгиз, 1960.

ТЕРМОУПРУГИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ТОЛСТОСТЕННОМ ЦИЛИНДРЕ, ВЫЗЫВАЕМЫЕ ТРЕХМЕРНЫМ СТАЦИОНАРНЫМ ТЕМПЕРАТУРНЫМ ПОЛЕМ

Интегрирование термоэластичных уравнений Дюгамеля-Неймана в общем случае трехмерного температурного поля и граничных условий применительно к толстостенному цилиндру, вследствие своего большого прикладного значения, привлекало многих авторов. Обширный материал по этому вопросу, содержащийся, например, в таких капитальных работах как [4, 5, 6] и др., а также в многочисленных журнальных статьях носит, по существу частный характер. Развитием результатов, полученных в [2], для трехмерного пространства в данной работе определены термоупругие напряжения в толстостенном цилиндре, вызываемые стационарным температурным полем, выраженные линейной комбинацией термоупругого потенциала перемещения и трех независимых бигармонических в целом функций. Каждая из них является обобщенным интегралом уравнения $\nabla^2 \nabla^2 \Phi = 0$ и представлена равномерно сходящимися рядами нового типа, в состав которых входят как гармонические и бигармонические, так и псевдогармонические и псевдобигармонические составляющие. Благодаря такой структуре рядов единственным образом определяются все составляющие тензора напряжения при достаточно общих граничных условиях.

§1. Постановка задачи

Определим термоупругие напряжения в однородном изотропном толстостенном цилиндре высотой H (см. рис. 1), возникающие в нём под действием трехмерного стационарного температурного поля.

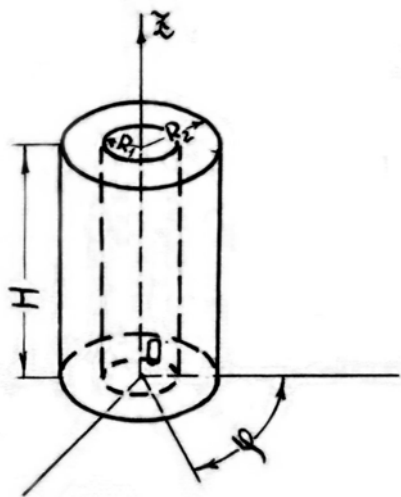


Рис. 1

Поместим начало координат в т. 0 и зададимся следующими условиями:

1. Внутри и на поверхностях цилиндра известен закон распределения температуры $T = f(r, \varphi, z)$. В дальнейшем в отношении произвольной функции $f(r, \varphi, z)$ будут установлены некоторые ограничения.

2. Все поверхности цилиндра свободны от действия внешних сил.

3. Массовые силы пренебрежимо малы.

4. Упругие и термические постоянные материала цилиндра не зависят от температуры.

В этом случае поле перемещений внутри и на границе тела описывается дифференциальными уравнениями Дюгамеля-Неймана:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial r} - \mu \frac{U}{r^2} + \mu \nabla^2 U - \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \varphi} &= \beta^* \frac{\partial T}{\partial r} \\ \frac{(\lambda + \mu)}{r} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi} - \mu \frac{V}{r^2} + \mu \nabla^2 V + \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \varphi} &= \frac{\beta^*}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \mu \nabla^2 W &= \beta^* \frac{\partial T}{\partial z} \\ \Delta &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rU) + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial W}{\partial z} \\ \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned} \right\}, \quad (1.1)$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

U, V, W - перемещения соответственно вдоль осей r, φ , и z .

λ и μ - коэффициенты Ламе и Пуассона.

β^* - коэффициент температурной деформации в обозначениях А. Лява [1].

Будем искать нетривиальное решение этих уравнений, удовлетворяющее указанным ранее граничным условиям, которые могут быть переписаны так:

1. $r = R_1$; $\sigma_r = 0$; $\tau_{r\varphi} = 0$; $\tau_{rz} = 0$;

2. $r = R_2$; $\sigma_r = 0$; $\tau_{r\varphi} = 0$; $\tau_{rz} = 0$;

3. $z = 0$; $\int_{R_1}^{R_2} \sigma_z dr = 0$; $\int_{R_1}^{R_2} \sigma_z r dr = 0$; $\int_{R_1}^{R_2} \tau_{rz} dr = 0$; $\int_{R_1}^{R_2} \tau_{\varphi z} dr = 0$; $\int_{R_1}^{R_2} \tau_{\varphi z} r dr = 0$;

4. $z = H$ $\int_{R_1}^{R_2} \sigma_z dr = 0$; $\int_{R_1}^{R_2} \sigma_z r dr = 0$; $\int_{R_1}^{R_2} \tau_{rz} dr = 0$; $\int_{R_1}^{R_2} \tau_{\varphi z} dr = 0$; $\int_{R_1}^{R_2} \tau_{\varphi z} r dr = 0$;

При определении граничных значений напряжений на торцевых поверхностях цилиндра используется принцип Сен-Венана.

§2. Обобщенный способ Фурье и основная теорема

Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (2.1)$$

Как было показано в [2] в отличие от существующего способа будем искать его частное решение в виде

$$\Phi = f_{1(r)} \theta_{(\varphi)} z_{(z)} + f_{2(\varphi)} R_{(r)} z_{(z)} + f_{3(z)} R_{(r)} \theta_{(\varphi)}, \quad (2.2)$$

где $f_{1(r)}$, $R_{(r)}$, $f_{2(\varphi)}$, $\theta_{(\varphi)}$, и $f_{3(z)}$, $z_{(z)}$ - функции, зависящие соответственно от одной переменной r, φ или z . Подставляя (2.2) в (2.1), после преобразований имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{f_1''}{R} + \frac{1}{r} \frac{f_1'}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{f_1}{R} \left(\frac{\theta''}{\theta} + r^2 \frac{z''}{z} \right) + \frac{1}{r^2} \left[\frac{f_2''}{\theta} + \frac{f_2}{\theta} \left(r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + r^2 \frac{z''}{z} \right) \right] = \\ & = -\frac{f_3''}{z} - \frac{f_3}{z} \left(\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\theta''}{\theta} \right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Поскольку функции R, θ и z оставались произвольными, наложим на них следующие три ограничения

$$\begin{aligned} \frac{\theta''}{\theta} &= -n^2; \\ \frac{z''}{z} &= m^2; \\ \frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\theta''}{\theta} &= -m^2, \end{aligned}$$

где n и m - постоянные, которые аналогичны требованию, чтобы

$$R\theta Z = (C_1^* e^{mz} + C_2^* e^{-mz})(C_3^* \cos n\varphi + C_4^* \sin n\varphi)[C_5^* J_n(mr) + C_6^* Y_n(mr)] \quad (2.4)$$

являлось решением (2.1). Таким образом, правая часть (2.3) зависит только от z , и не зависит от r и φ , а левая - наоборот, следовательно

$$\begin{aligned} & \frac{f_1''}{R} + \frac{1}{r} \frac{f_1'}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{f_1}{R} (m^2 r^2 - n^2) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{f_2''}{\theta} + n^2 \frac{f_2}{\theta} \right) = -k; \\ & \frac{f_3''}{Z} - m \frac{f_3}{Z} = k, \end{aligned}$$

где k - постоянная.

Из последнего уравнения методом вариации постоянных находим

$$f_3 = C_{1,nm}^{**} e^{mz} + C_{2,nm}^{**} e^{-mz} + C_{3,nm}^{**} z e^{mz} + C_{4,nm}^{**} z e^{-mz}.$$

Продолжая далее разделение переменных, получаем

$$r^2 \frac{f_1''}{R} + r \frac{f_1'}{R} + (m^2 r^2 - n^2) \frac{f_1}{R} + k r^2 = -\frac{f_2''}{\theta} - n^2 \frac{f_2}{\theta}.$$

И так как правая часть этого равенства зависит только от φ и не зависит от r , а левая - наоборот, то

$$\begin{aligned} & \frac{f_2''}{\theta} + n^2 \frac{f_2}{\theta} = -l \\ & r^2 \frac{f_1''}{R} + r \frac{f_1'}{R} + (m^2 r^2 - n^2) \frac{f_1}{R} + k r^2 = l \end{aligned} \quad (2.5)$$

где l - также постоянная.

Методом вариации постоянных находим

$$f_1 = C_{9, nm}^* J_n(mr) + C_{10, nm}^* Y_n(mr) + J_n(mr) \int \frac{\left(\frac{l}{r^2} - k\right) [C_{11, nm}^* J_n(mr) + C_{12, nm}^* Y_n(mr)] Y_n(mr) dr}{J_n(mr) Y_n'(mr) - J_n'(mr) Y_n(mr)} + Y_n(mr) \int \frac{\left(\frac{l}{r^2} - k\right) [C_{11, nm}^* J_n(mr) + C_{12, nm}^* Y_n(mr)] J_n(mr) dr}{J_n(mr) Y_n'(mr) - J_n'(mr) Y_n(mr)};$$

$$\begin{aligned} \Phi = & \{e^{mz} [C_{1,nm} J_n(mr) + C_{2,nm} Y_n(mr) - J_n(mr)] \int \frac{\left(\frac{l}{r^2} - k\right) \langle C_{3,nm} J_n(mr) + \\ & + C_{4,nm} Y_n(mr) \rangle Y_n(mr) dr}{J_n(mr) Y'_n(mr) - J'_n(mr) Y_n(mr)} + Y_n(mr) \int \frac{\left(\frac{l}{r^2} - k\right) \langle C_{3,nm} J_n(mr) + C_{4,nm} Y_n(mr) \rangle *}{J_n(mr) Y'_n(mr) - J'_n(mr) Y_n(mr)} * \\ & \frac{* J_n(mr) dr}{* Y_n(mr)} \Big] + e^{-mz} [C_{5,nm} J_n(mr) + C_{6,nm} Y_n(mr) - J_n(mr)] \int \frac{\left(\frac{l}{r^2} - k\right) \langle C_{7,nm} J_n(mr) + \\ & + C_{8,nm} Y_n(mr) \rangle Y_n(mr) dr}{J_n(mr) Y'_n(mr) - J'_n(mr) Y_n(mr)} + Y_n(mr) \int \frac{\left(\frac{l}{r^2} - k\right) \langle C_{7,nm} J_n(mr) + C_{8,nm} Y_n(mr) \rangle *}{J_n(mr) Y'_n(mr) - J'_n(mr) Y_n(mr)} * \\ & \frac{* J_n(mr) dr}{* Y_n(mr)} \Big] + ze^{mz} \frac{k}{2m} [C_{3,nm} J_n(mr) + C_{4,nm} Y_n(mr)] - ze^{mz} \frac{k}{2m} * \\ & * [C_{7,nm} J_n(mr) + C_{8,nm} Y_n(mr)] \Big] \cos n\varphi + \{e^{mz} [C_{9,nm} J_n(mr) + C_{10,nm} Y_n(mr) - J_n(mr) * \\ & * \int \frac{\left(\frac{l}{r^2} - k\right) \langle C_{11,nm} J_n(mr) + C_{12,nm} Y_n(mr) \rangle Y_n(mr) dr}{J_n(mr) Y'_n(mr) - J'_n(mr) Y_n(mr)} + Y_n(mr) \int \frac{\left(\frac{l}{r^2} - k\right) \langle C_{11,nm} J_n(mr) + \\ & + C_{12,nm} Y_n(mr) \rangle J_n(mr) dr}{J_n(mr) Y'_n(mr) - J'_n(mr) Y_n(mr)} + e^{-mz} [C_{13,nm} J_n(mr) + C_{14,nm} Y_n(mr) - J_n(mr) * \\ & * \int \frac{\left(\frac{l}{r^2} - k\right) \langle C_{15,nm} J_n(mr) + C_{16,nm} Y_n(mr) \rangle Y_n(mr) dr}{J_n(mr) Y'_n(mr) - J'_n(mr) Y_n(mr)} + Y_n(mr) \int \frac{\left(\frac{l}{r^2} - k\right) \langle C_{15,nm} J_n(mr) + \end{aligned}$$

89

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{+ C_{16,nm} Y_n(mr) \rangle J_n(mr) dr}{- J'_n(mr) Y_n(mr)} \right] + z e^{mz} \frac{k}{2m} [C_{11,nm} J_n(mr) + C_{12,nm} Y_n(mr)] - z e^{-mz} \frac{k}{2m} * \\
& * [C_{15,nm} J_n(mr) + C_{16,nm} Y_n(mr)] \rangle \text{Sinn} \varphi + \left\{ e^{mz} \frac{l}{2n} [C_{11,nm} J_n(mr) + C_{12,nm} Y_n(mr)] + \right. \\
& + e^{mz} \frac{l}{2n} [C_{15,nm} J_n(mr) + C_{16,nm} Y_n(mr)] \left. \right\} \varphi \text{Cosn} \varphi - \left\{ e^{mz} \frac{l}{2n} [C_{3,nm} J_n(mr) + \right. \\
& + C_{4,nm} Y_n(mr)] + e^{-mz} \frac{l}{2n} [C_{7,nm} J_n(mr) + C_{8,nm} Y_n(mr)] \left. \right\} \varphi \text{Sinn} \varphi
\end{aligned} \quad (2.6)$$

где $C_{\rho,nm}$ ($\rho = 1, 2, 3, \dots, 16$) - постоянные, определяемые из граничных условий.

Полагая, что, как и в случае (2.4), чисел n_i и m_j может быть бесчисленное множество (из этого множества будут приниматься во внимание только вещественные значения) в качестве решения можно рассмотреть ряд

$$\Phi = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_{ij},$$

который при некоторых условиях равномерно сходится к обобщенному решению уравнения (2.1)

Не останавливаясь на подробном анализе отличий (2.6) от обычного решения (2.4) уравнения (2.1) докажем следующие три теоремы.

Теорема 1

Фундаментальные функции вида f_1 , удовлетворяющие при $r = R_1$ и $r = R_2$ граничным условиям $\alpha f'_1 + \beta f_1 = 0$, где α и β - постоянные, обладают свойством обобщенной ортогональности, т.е.

$$\int_{R_1}^{R_2} r f_{1i} f_{1j} dr = 0 \text{ при } i \neq j.$$

Действительно, по построению своему, функции f_1 удовлетворяют уравнению (2.5), если заменить в нём m на m_i и k на k_i . Тогда

$$\left. \begin{aligned} f_{1i}'' + \frac{1}{r} f_{1i}' + \left(m_i^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) f_{1i} &= \left(\frac{l}{r^2} - k_i \right) R_i \\ f_{1j}'' + \frac{1}{r} f_{1j}' + \left(m_j^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) f_{1j} &= \left(\frac{l}{r^2} - k_j \right) R_j \end{aligned} \right\}. \quad (2.7)$$

Умножим первое уравнение на $r f_{1j}$, а второе на $r f_{1i}$ и вычтем почленно одно из другого. Интегрируя затем полученное выражение по промежутку (R_1, R_2) находим

$$\begin{aligned}
(m_i^2 - m_j^2) \int_{R_1}^{R_2} r f_{1i} f_{1j} dr &= (k_i - k_j) \int_{R_1}^{R_2} r (R_i f_{1j} - R_j f_{1i}) dr - \int_{R_1}^{R_2} r (f_{1i}'' f_{1j} - f_{1j}'' f_{1i}) dr - \\
&- \int_{R_1}^{R_2} (f_{1i}' f_{1j} - f_{1j}' f_{1i}) dr.
\end{aligned}$$

Берем четвертый интеграл по частям

$$\int_{R_1}^{R_2} r f_{1i}'' f_{1j} dr = r f_{1i} f_{1j} \Big|_{R_1}^{R_2} - \int_{R_1}^{R_2} f_{1i}' f_{1j} dr - \int_{R_1}^{R_2} r f_{1j}' f_{1i} dr.$$

Производя точно такие же действия со вторым интегралом и подставляя полученные результаты в исходное равенство, имеем:

$$(m_i^2 - m_j^2) \int_{R_1}^{R_2} r f_{1i} f_{1j} dr = (k_i - k_j) \int_{R_1}^{R_2} r (R_i f_{1j} - R_j f_{1i}) dr - [r (f_{1j} f_{1i}' - f_{1i} f_{1j}')]_{R_1}^{R_2}. \quad (2.8)$$

Умножим далее первое уравнение (2.7) на $r R_j$, а второе уравнение на $r R_i$ и вычтем почленно одно из другого. Интегрируя полученное выражение, как и ранее, по промежутку (R_1, R_2) получаем

$$\begin{aligned} (m_i^2 - m_j^2) \int_{R_1}^{R_2} r (f_{1i} R_j - f_{1j} R_i) dr = & - \int_{R_1}^{R_2} r (R_j f_{1i}'' - R_i f_{1j}'') dr - \int_{R_1}^{R_2} (f_{1i}' R_j - f_{1j}' R_i) dr - \\ & - (k_i - k_j) \int_{R_1}^{R_2} r R_i R_j dr. \end{aligned}$$

Беря третий и четвертый интегралы по частям и подставляя полученные результаты в исходное уравнение, после уже известных преобразований получаем

$$\begin{aligned} (m_i^2 - m_j^2) \int_{R_1}^{R_2} r (f_{1i} R_j - f_{1j} R_i) dr = & - [r (R_j f_{1i}' - R_i f_{1j}')]_{R_1}^{R_2} - (k_i - k_j) \int_{R_1}^{R_2} r R_i R_j dr + \\ & + \int_{R_1}^{R_2} r (R_j' f_{1i} - R_i' f_{1j}') dr. \end{aligned}$$

Берем далее по частям в последнем выражении четвертый и пятый интегралы. После простых преобразований имеем

$$\begin{aligned} \int_{R_1}^{R_2} r (f_{1i} R_j - f_{1j} R_i) dr = & \frac{1}{2(m_i^2 - m_j^2)} \{ - [r (R_j f_{1i}' - R_i f_{1j}')]_{R_1}^{R_2} + \\ & + [r (R_j' f_{1i} - R_i' f_{1j}')]_{R_1}^{R_2} - (k_i - k_j) \int_{R_1}^{R_2} r R_i R_j dr \}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Подставляя наконец (2.9) в (2.8), находим

$$\begin{aligned} (m_i^2 - m_j^2) \int_{R_1}^{R_2} r f_{1i} f_{1j} dr = & \frac{(k_i - k_j)}{2(m_i^2 - m_j^2)} \{ - [r (R_j f_{1i}' - R_i f_{1j}')]_{R_1}^{R_2} + \\ & + [r (R_j' f_{1i} - R_i' f_{1j}')]_{R_1}^{R_2} - (k_i - k_j) \int_{R_1}^{R_2} r R_i R_j dr \} - [r (f_{1j} f_{1i}' - f_{1i} f_{1j}')]_{R_1}^{R_2}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Согласно определению

$$\left. \begin{aligned} \alpha f'_{1(R_1)} + \beta f_{1(R_1)} &= 0 \\ \alpha f'_{1(R_2)} + \beta f_{1(R_2)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Поскольку условию (2.11) должны удовлетворять все частные решения уравнения (2.1), то

$$\left. \begin{aligned} \alpha f'_{1i(R_1)} + \beta f'_{1i(R_1)} &= 0 \\ \alpha f'_{1j(R_1)} + \beta f'_{1j(R_1)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Умножая первое уравнение (2.12) на $f_{1j(R_1)}$, а второе на $f_{1i(R_1)}$ и вычитая почленно одно из другого, получаем

$$f'_{1i(R_1)} f_{1j(R_1)} - f'_{1j(R_1)} f_{1i(R_1)} = 0.$$

Точно так же находим, что

$$f'_{1i(R_2)} f_{1j(R_2)} - f'_{1j(R_2)} f_{1i(R_2)} = 0.$$

По построению f_1

$$\left. \begin{aligned} \alpha R'_{i(R_1)} + \beta R_{i(R_1)} &= 0 \\ \alpha R'_{j(R_1)} + \beta R_{j(R_1)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Умножая первое уравнение (2.13) на $f_{1j(R_1)}$ второе (2.12) на $R_{i(R_1)}$ и преобразовывая уже известным образом, имеем

$$R'_{i(R_1)} f_{1j(R_1)} - R_{i(R_1)} f'_{1j(R_1)} = 0.$$

Аналогично

$$R'_{i(R_2)} f_{1j(R_2)} - R_{i(R_2)} f'_{1j(R_2)} = 0.$$

Производя подобные действия со вторым уравнением (2.13) и первым (2.12), легко проверить, что

$$R'_{j(R_1)} f_{1i(R_1)} - R_{j(R_1)} f'_{1i(R_1)} = 0;$$

$$R'_{j(R_2)} f_{1i(R_2)} - R_{j(R_2)} f'_{1i(R_2)} = 0.$$

Сравнивая полученные результаты с правой частью (2.10) и вспоминая, что, как известно, при рассматриваемых граничных условиях и $i \neq j$

$$\int_R^{R_2} r R_i R_j dr = 0 \text{ получаем тем самым утверждение теоремы.}$$

Следствие

$$\text{При } i \neq j \quad \int_R^{R_2} r f_{1i} R_j dr = \int_{R_1}^{R_2} r f_{1j} R_i dr = \int_{R_1}^{R_2} r f_{1i}^* f_{1j}^* dr = 0,$$

где

$$\begin{aligned} f_{1ij}^* &= -J_n(m_{ij}r) \int \left(\frac{l}{r^2} - k_{ij} \right) [C_{ij} J_n(m_{ij}r) + d_{ij} Y_n(m_{ij}r)] Y_n(m_{ij}r) dr \\ &\quad \frac{J_n(m_{ij}r) Y_n'(m_{ij}r) - J_n'(m_{ij}r) Y_n(m_{ij}r)}{J_n(m_{ij}r) Y_n'(m_{ij}r) - J_n'(m_{ij}r) Y_n(m_{ij}r)} + \\ &\quad + Y_n(m_{ij}r) \int \left(\frac{l}{r^2} - k_{ij} \right) [C_{ij} J_n(m_{ij}r) + d_{ij} Y_n(m_{ij}r)] Y_n(m_{ij}r) dr \\ &\quad \frac{J_n(m_{ij}r) Y_n'(m_{ij}r) - J_n'(m_{ij}r) Y_n(m_{ij}r)}{J_n(m_{ij}r) Y_n'(m_{ij}r) - J_n'(m_{ij}r) Y_n(m_{ij}r)}; \end{aligned}$$

C_{ij}, d_{ij} - произвольные постоянные.

Теорема 2

Произвольная достаточно гладкая функция $R_{(r)}$, удовлетворяющая граничным условиям (2.11), может быть представлена равномерно сходящимся рядом вида

$$R_{(r)} = \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ A_i J_n(m_i r) + B_i Y_n(m_i r) - J_n(m_i r) \int \frac{\left(\frac{l}{r^2} - k_i\right) [C_i J_n(m_i r) + d_i Y_n(m_i r)]^*}{J_n(m_i r) Y_n'(m_i r) - J_n'(m_i r) Y_n(m_i r)} \right. \\ \left. + \frac{Y_n(m_i r) dr}{Y_n(m_i r)} + Y_n(m_i r) \int \frac{\left(\frac{l}{r^2} - k_i\right) [C_i J_n(m_i r) + d_i Y_n(m_i r)] J_n(m_i r) dr}{J_n(m_i r) Y_n'(m_i r) - J_n'(m_i r) Y_n(m_i r)} \right\}, \quad (2.14)$$

где m_i - всё возрастающая последовательность фундаментальных чисел $m_1 < m_2 < m_3 < \dots < m_i < \dots$, а A_i , B_i , C_i и d_i - постоянные, определяемые как

$$A_i = \frac{\int_{R_1}^{R_2} r R_{(r)} x_i dr \int_{R_1}^{R_2} r y_i^2 dr - \int_{R_1}^{R_2} r R_{(r)} y_i dr \int_{R_1}^{R_2} r x_i y_i dr}{\int_{R_1}^{R_2} r x_i^2 dr \int_{R_1}^{R_2} r y_i^2 dr - \left(\int_{R_1}^{R_2} r x_i y_i dr \right)^2}; \quad B_i = P_i A_i;$$

$$C_i = \frac{\int_{R_1}^{R_2} r R_{(r)} y_i dr \int_{R_1}^{R_2} r x_i^2 dr - \int_{R_1}^{R_2} r R_{(r)} x_i dr \int_{R_1}^{R_2} r x_i y_i dr}{\int_{R_1}^{R_2} r x_i^2 dr \int_{R_1}^{R_2} r y_i^2 dr - \left(\int_{R_1}^{R_2} r x_i y_i dr \right)^2}; \quad d_i = H_i C_i$$

где

$$x_i = J_n(m_i r) + P_i Y_n(m_i r); \quad y_i = -J_n(m_i r) \int \frac{\left(\frac{l}{r^2} - k_i\right) [J_n(m_i r) + H_i Y_n(m_i r)] Y_n(m_i r) dr}{J_n(m_i r) Y_n'(m_i r) - J_n'(m_i r) Y_n(m_i r)} + \\ + Y_n(m_i r) \int \frac{\left(\frac{l}{r^2} - k_i\right) [J_n(m_i r) + H_i Y_n(m_i r)] J_n(m_i r) dr}{J_n(m_i r) Y_n'(m_i r) - J_n'(m_i r) Y_n(m_i r)}; \quad P_i = -\frac{\alpha J_n'(m_i R_{1,2}) + \beta J_n(m_i R_{1,2})}{\alpha Y_n'(m_i R_{1,2}) + \beta Y_n(m_i R_{1,2})}$$

$$H_i = -\frac{\int \frac{\left(\frac{l}{r^2} - k_i\right) [J_n(m_i R_{1,2}) + P_i Y_n(m_i R_{1,2})] J_n(m_i R_{1,2}) dR_{1,2}}{J_n(m_i R_{1,2}) Y_n'(m_i R_{1,2}) - J_n'(m_i R_{1,2}) Y_n(m_i R_{1,2})}}{\int \frac{\left(\frac{l}{r^2} - k_i\right) [J_n(m_i R_{1,2}) + P_i Y_n(m_i R_{1,2})] Y_n(m_i R_{1,2}) dR_{1,2}}{J_n(m_i R_{1,2}) Y_n'(m_i R_{1,2}) - J_n'(m_i R_{1,2}) Y_n(m_i R_{1,2})}}.$$

Рассмотрим ряд

$$R_{(r)}^* = \sum_{i=1}^M \{A_i[J_n(m_i r) + P_i Y_n(m_i r)] + C_i[-J_n(m_i r)] \int \frac{\left(\frac{l}{r^2} - k_i\right) \langle J_n(m_i r) + H_i Y_n(m_i r) \rangle^*}{J_n(m_i r) Y_n'(m_i r) - J_n'(m_i r)^*} \quad (2.15)$$

$$\frac{*Y_n(m_i r) dr}{*Y_n(m_i r)} + Y_n(m_i r) \int \frac{\left(\frac{l}{r^2} - k_i\right) \langle J_n(m_i r) + H_i Y_n(m_i r) \rangle J_n(m_i r) dr}{J_n(m_i r) Y_n'(m_i r) - J_n'(m_i r) Y_n(m_i r)} \Big] \Big\},$$

в котором $B_i = P_i A_i$, а $d_i = H_i C_i$ функции, составляющие этот ряд, ограничены и интегрируемы в интервале (R_1, R_2) . Поэтому $R_{(r)}^*$, а следовательно и $R_{(r)} - R_{(r)}^*$, есть функция с интегрируемым квадратом. Составим интеграл

$$\delta_i = \int_{R_1}^{R_2} r [R_{(r)} - R_{(r)}^*]^2 dr, \quad (2.16)$$

характеризующий среднюю квадратичную ошибку приближения $R_{(r)}^*$ к $R_{(r)}$ в рассматриваемом интервале. Величина δ_i представляет функцию от параметров A_i и C_i . Поэтому наилучшее $R_{(r)}^*$ к $R_{(r)}$ приближение получится тогда, когда эти коэффициенты будут выбираться из условий

$$\frac{\partial \delta_i}{\partial A_i} = \dots = \frac{\partial \delta_i}{\partial C_i} = \dots = 0.$$

Дифференцируем δ_i по A_i

$$\int_{R_1}^{R_2} \left\{ R_{(r)} - \sum_{i=1}^M A_i [J_n(m_i r) + P_i Y_n(m_i r)] + C_i [-J_n(m_i r)] \int \frac{\left(\frac{l}{r^2} - k_i\right) \langle J_n(m_i r) + H_i Y_n(m_i r) \rangle Y_n(m_i r) dr}{J_n(m_i r) Y_n'(m_i r) - J_n'(m_i r) Y_n(m_i r)} + \right. \\ \left. + Y_n(m_i r) \int \frac{\left(\frac{l}{r^2} - k_i\right) \langle J_n(m_i r) + H_i Y_n(m_i r) \rangle J_n(m_i r) dr}{J_n(m_i r) Y_n'(m_i r) - J_n'(m_i r) Y_n(m_i r)} \right\} [J_n(m_i r) + P_i Y_n(m_i r)] r dr = 0$$

и затем по C_i

$$\int_{R_1}^{R_2} \left\{ R_{(r)} - \sum_{i=1}^M A_i [J_n(m_i r) + P_i Y_n(m_i r)] + C_i [-J_n(m_i r)] \int \frac{\left(\frac{l}{r^2} - k_i\right) \langle J_n(m_i r) + H_i Y_n(m_i r) \rangle Y_n(m_i r) dr}{J_n(m_i r) Y_n'(m_i r) - J_n'(m_i r) Y_n(m_i r)} + \right. \\ \left. + Y_n(m_i r) \int \frac{\left(\frac{l}{r^2} - k_i\right) \langle J_n(m_i r) + H_i Y_n(m_i r) \rangle Y_n(m_i r) dr}{J_n(m_i r) Y_n'(m_i r) - J_n'(m_i r) Y_n(m_i r)} \right\} \left[-J_n(m_i r) \int \frac{\left(\frac{l}{r^2} - k_i\right) \langle J_n(m_i r) + H_i Y_n(m_i r) \rangle Y_n(m_i r) dr}{J_n(m_i r) Y_n'(m_i r) - J_n'(m_i r) Y_n(m_i r)} + \right. \\ \left. + H_i Y_n(m_i r) \int \frac{\left(\frac{l}{r^2} - k_i\right) \langle J_n(m_i r) + H_i Y_n(m_i r) \rangle J_n(m_i r) dr}{J_n(m_i r) Y_n'(m_i r) - J_n'(m_i r) Y_n(m_i r)} \right] r dr = 0.$$

Принимая во внимание следствие теоремы 1 и решая совместно полученные уравнения относительно A_i и C_i , находим

$$\left. \begin{aligned} A_i &= \frac{\int_{R_1}^{R_2} r R_{(r)} x_i dr \int_{R_1}^{R_2} r y_i^2 dr - \int_{R_1}^{R_2} r R_{(r)} y_i dr \int_{R_1}^{R_2} r x_i y_i dr}{\int_{R_1}^{R_2} r x_i^2 dr \int_{R_1}^{R_2} r y_i^2 dr - \left(\int_{R_1}^{R_2} r x_i y_i dr \right)^2} \\ C_i &= \frac{\int_{R_1}^{R_2} r R_{(r)} y_i dr \int_{R_1}^{R_2} r x_i^2 dr - \int_{R_1}^{R_2} r R_{(r)} x_i dr \int_{R_1}^{R_2} r x_i y_i dr}{\int_{R_1}^{R_2} r x_i^2 dr \int_{R_1}^{R_2} r y_i^2 dr - \left(\int_{R_1}^{R_2} r x_i y_i dr \right)^2} \end{aligned} \right\}. \quad (2.17)$$

Как видно из (2.17), найденные значения A_i и C_i не только соответствуют минимуму δ_i , но и ограничены. Действительно в точке минимума должно выполняться неравенство

$$\frac{\partial^2 \delta_i}{\partial A_i^2} \cdot \frac{\partial^2 \delta_i}{\partial C_i^2} - \left(\frac{\partial^2 \delta_i}{\partial A_i \partial C_i} \right)^2 = \int_{R_1}^{R_2} r x_i^2 dr \int_{R_1}^{R_2} r y_i^2 dr - \left(\int_{R_1}^{R_2} r x_i y_i dr \right)^2 > 0.$$

Сравнивая полученное выражение с известным неравенством Буняковского, а также учитывая ограниченность функций x_i и y_i при условии, что m_i не является корнем уравнения $J_n(m_i r) Y'_n(m_i r) - J'_n(m_i r) Y_n(m_i r)$ ни при каких значениях r в интервале (R_1, R_2) , непосредственно убеждаемся в справедливости сделанного ранее утверждения, за исключением может быть одного случая, который не рассматривается. Обозначим минимальное значение в интервале (R_1, R_2) выражения

$$J_n(m_i r) Y'_n(m_i r) - J'_n(m_i r) Y_n(m_i r) = S_{\min}.$$

И построим мажоранту ряда (2.15), как

$$S_{(r)} = \sum_{i=1}^M \left\{ A_i [J_n(m_i r) + P_i Y_n(m_i r)] + \frac{C_i}{S_{\min}} \left[-J_n(m_i r) \int \left(\frac{l}{r^2} - k_i \right) \langle J_n(m_i r) + H_i Y_n(m_i r) \rangle^* \right. \right. \\ \left. \left. * Y_n(m_i r) dr + Y_n(m_i r) \int \left(\frac{l}{r^2} - k_i \right) \langle J_n(m_i r) + H_i Y_n(m_i r) \rangle J_n(m_i r) dr \right] \right\} \quad (2.18)$$

Полагая коэффициенты P_i и H_i ограниченными и сравнивая (2.14) с (2.18) замечаем, что, начиная с некоторого достаточно большого $i < M$, все последующие члены ряда (2.18) $\geq$ соответствующих членов (2.14). Поскольку при сколь угодно большом M ряд (2.18), являющийся степенным, сходится в интервале (R_1, R_2) , при $0 < R_1 < R_2$ в чём нетрудно убедиться по обычному признаку Даламбера, то, как известно, ряд (2.14) также будет сходящимся в интервале (R_1, R_2) и притом равномерно. И т.к. непосредственно следует, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{R_1}^{R_2} r [R_{(r)} - R_{(r)}^*]^2 dr = 0,$$

то $R_{(r)}^*$, сходясь равномерно, не может иметь своим пределом ни какую другую функцию, кроме $R_{(r)}$. Легко показать также, что коэффициенты (2.17), найденные для $i = M$, при увеличении числа членов ряда (2.15), как и в случае [2], остаются неизменными. Осталось убедиться в том, что коэффициенты P_i и H_i действительно ограничены. Из граничных условий (2.11) имеем

$$P_i = -\frac{\alpha J'_n(m_i R_{1,2}) + \beta J_n(m_i R_{1,2})}{\alpha Y'_n(m_i R_{1,2}) + \beta Y_n(m_i R_{1,2})},$$

$$H_i = -\frac{\int \left(\frac{l}{r^2} - k_i \right) [J_n(m_i R_{1,2}) + P_i Y_n(m_i R_{1,2})] J_n(m_i R_{1,2}) dR_{1,2}}{\int \frac{J_n(m_i R_{1,2}) Y'_n(m_i R_{1,2}) - J'_n(m_i R_{1,2}) Y_n(m_i R_{1,2})}{J_n(m_i R_{1,2}) Y'_n(m_i R_{1,2}) - J'_n(m_i R_{1,2}) Y_n(m_i R_{1,2})} dR_{1,2}},$$

где m_i - не совпадает с корнями уравнений

$$\alpha Y'_n(m_i R_{1,2}) + \beta Y_n(m_i R_{1,2}) = 0$$

$$J_n(m_i R_{1,2}) [J_n(m_i R_{1,2}) + P_i Y_n(m_i R_{1,2})] = 0$$

Из выражений P_i и H_i видно, что при неограниченном возрастании m_i , последние остаются ограниченными. Оставшиеся неизвестными коэффициенты ряда (2.14) определяются, как

$$B_i = P_i A_i \quad d_i = H_i C_i.$$

Т.о. теорема доказана. Не выявляя дальнейших отличий ряда (2.14) от обычного ряда Фурье по бесселевым функциям, представляющих решение уравнения (2.1), докажем третью и основную теорему.

Теорема 3

Произвольная достаточно гладкая функция $F(r, \varphi)$, удовлетворяющая граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} \alpha \frac{\partial F(R_{1,2})}{\partial R_{1,2}} + \beta F(R_{1,2}) &= 0 \\ \alpha_1 \frac{\partial F(\varphi_{1,2})}{\partial \varphi_{1,2}} + \beta_1 F(\varphi_{1,2}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

в области D , ограниченной кривыми $r = R_1, r = R_2, \varphi = \varphi_1, \varphi = \varphi_2$ может быть представлена равномерно сходящимся рядом вида

$$F(r, \varphi) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \{ [A_{ij} J_{n_i}(m_j r) + B_{ij} Y_{n_i}(m_j r) - J_{n_i}(m_j r)] \int \frac{\left(\frac{l}{r^2} - k_j \right) \langle C_{ij} J_{n_i}(m_j r) + d_{ij} Y_{n_i}(m_j r) \rangle^*}{J_{n_i}(m_j r) Y'_{n_i}(m_j r) - J'_{n_i}(m_j r) Y_{n_i}(m_j r)^*} \cdot$$

$$\frac{* Y_{n_i}(m_j r)}{* Y_{n_i}(m_j r)} + Y_{n_i}(m_j r) \int \frac{\left(\frac{l}{r^2} - k_j \right) \langle C_{ij} J_{n_i}(m_j r) + d_{ij} Y_{n_i}(m_j r) \rangle J_{n_i}(m_j r)}{J_{n_i}(m_j r) Y'_{n_i}(m_j r) - J'_{n_i}(m_j r) Y_{n_i}(m_j r)}] \cos n_i \varphi +$$

Продолжение формулы смотри на следующей странице.

$$\begin{aligned}
& + [A_{ij}^* J_{n_i}(m_j r) + B_{ij}^* Y_{n_i}(m_j r) - J_{n_i}(m_j r)] \int \frac{\left(\frac{l}{r^2} - k_j\right) \langle C_{ij}^* J_{n_i}(m_j r) + d_{ij}^* Y_{n_i}(m_j r) \rangle Y_{n_i}(m_j r) dr}{J_{n_i}(m_j r) Y'_{n_i}(m_j r) - J'_{n_i}(m_j r) Y_{n_i}(m_j r)} + \\
& + Y_{n_i}(m_j r) \int \frac{\left(\frac{l}{r^2} - k_j\right) \langle C_{ij}^* J_{n_i}(m_j r) + d_{ij}^* Y_{n_i}(m_j r) \rangle J_{n_i}(m_j r) dr}{J_{n_i}(m_j r) Y'_{n_i}(m_j r) - J'_{n_i}(m_j r) Y_{n_i}(m_j r)}] \text{Sinn}_i \varphi + [N_{ij}^* J_{n_i}(m_j r) + \\
& + M_{ij}^* Y_{n_i}(m_j r)] \varphi \text{Cosn}_i \varphi + [N_{ij}^* J_{n_i}(m_j r) + M_{ij}^* Y_{n_i}(m_j r)] \varphi \text{Sinn}_i \varphi \} \quad (2.20)
\end{aligned}$$

Где n_i и m_j - всё возрастающие последовательности фундаментальных чисел $n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_i < \dots$, $m_1 < m_2 < m_3 < \dots < m_j < \dots$, а $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, d_{ij}, N_{ij}, M_{ij}$ и $A_{ij}^*, B_{ij}^*, C_{ij}^*, d_{ij}^*, N_{ij}^*, M_{ij}^*$ - постоянные определяемые как

$$\begin{aligned}
A_{ij} &= \frac{\int_{R_1}^{R_2} r y_{ij}^2 dr \int_{R_1}^{R_2} r x_{ij} \left[\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(r, \varphi) \zeta_i d\varphi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \xi_i^2 d\varphi - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(r, \varphi) \xi_i d\varphi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \zeta_i \xi_i d\varphi \right] dr - \int_{R_1}^{R_2} r x_{ij} y_{ij} dr}{\left[\int_{R_1}^{R_2} r x_{ij}^2 dr \int_{R_1}^{R_2} r y_{ij}^2 dr - \left(\int_{R_1}^{R_2} r x_{ij} y_{ij} dr \right)^2 \right] * \left[\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \zeta_i^2 d\varphi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \xi_i^2 d\varphi - \right.} \\
& \quad \left. * \int_{R_1}^{R_2} r y_{ij} \left[\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(r, \varphi) \zeta_i d\varphi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \xi_i^2 d\varphi - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(r, \varphi) \xi_i d\varphi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \zeta_i \xi_i d\varphi \right] dr - \left(\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \zeta_i \xi_i d\varphi \right)^2 \right]}; \\
B_{ij} &= P_{ij} A_{ij}; \quad A_{ij}^* = k_i^* A_{ij}; \quad B_{ij}^* = k_i^* P_{ij}; \\
C_{ij} &= \frac{\int_{R_1}^{R_2} r x_{ij}^2 dr \int_{R_1}^{R_2} r y_{ij} \left[\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(r, \varphi) \zeta_i d\varphi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \xi_i^2 d\varphi - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(r, \varphi) \xi_i d\varphi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \zeta_i \xi_i d\varphi \right] dr - \int_{R_1}^{R_2} r x_{ij} y_{ij} dr}{\left[\int_{R_1}^{R_2} r x_{ij}^2 dr \int_{R_1}^{R_2} r y_{ij}^2 dr - \left(\int_{R_1}^{R_2} r x_{ij} y_{ij} dr \right)^2 \right] * \left[\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \zeta_i^2 d\varphi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \xi_i^2 d\varphi - \right.} \\
& \quad \left. * \int_{R_1}^{R_2} r x_{ij} \left[\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(r, \varphi) \zeta_i d\varphi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \xi_i^2 d\varphi - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(r, \varphi) \xi_i d\varphi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \zeta_i \xi_i d\varphi \right] dr - \left(\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \zeta_i \xi_i d\varphi \right)^2 \right]}; \quad d_{ij} = H_{ij} C_{ij}; \quad C_{ij}^* = L_i^* C_{ij}; \quad d_{ij}^* = L_i^* H_{ij} C_{ij}; \\
N_{ij} &= \frac{\int_{R_1}^{R_2} r x_{ij}^* \left[\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(r, \varphi) \zeta_i d\varphi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \xi_i^2 d\varphi - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(r, \varphi) \xi_i d\varphi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \zeta_i \xi_i d\varphi \right] dr}{\int_{R_1}^{R_2} r x_{ij}^{*2} dr \left[\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \zeta_i^2 d\varphi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \xi_i^2 d\varphi - \left(\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \zeta_i \xi_i d\varphi \right)^2 \right]}; \quad d_{ij}^* = L_i^* H_{ij} C_{ij}; \quad N_{ij}^* = L_i^* N_{ij} \\
M_{ij} &= P_{ij}^* N_{ij}; \quad M_{ij}^* = L_i^* P_{ij}^* N_{ij}.
\end{aligned}$$

Здесь $\zeta_i = \text{Cosn}_i \varphi + k_i^* \text{Sinn}_i \varphi$; $\xi_i = \varphi(\text{Cosn}_i \varphi + L_i^* \text{Sinn}_i \varphi)$; $k_i^*, L_i^*, P_{ij}, P_{ij}^*, H_{ij}$ - постоянные, x_{ij}^* соответствует значению x_{ij} , если в нём P_{ij} заменить на P_{ij}^* .

Из теоремы 2 [2] следует, что $F(r, \varphi)$ в интервале (φ_1, φ_2) может быть представлена равномерно сходящимся рядом

$$F(r, \varphi) = \sum_{i=1}^{\infty} [a_{n_i}(r) \cos n_i \varphi + b_{n_i}(r) \sin n_i \varphi + a_{n_i}^*(r) \varphi \cos n_i \varphi + b_{n_i}^*(r) \varphi \sin n_i \varphi]$$

с коэффициентами

$$\left. \begin{aligned} a_{n_i(r)} &= \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(r, \varphi) \zeta_i d\varphi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \xi_i^2 d\varphi - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(r, \varphi) \xi_i d\varphi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \zeta_i \xi_i d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \zeta_i^2 d\varphi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \xi_i^2 d\varphi - \left(\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \zeta_i \xi_i d\varphi \right)^2}; & b_{n_i(r)} &= k_i^* a_{n_i(r)} \\ a_{n_i}^*(r) &= \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(r, \varphi) \xi_i d\varphi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \zeta_i^2 d\varphi - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(r, \varphi) \zeta_i d\varphi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \xi_i \zeta_i d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \zeta_i^2 d\varphi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \xi_i^2 d\varphi - \left(\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \zeta_i \xi_i d\varphi \right)^2}; & b_{n_i}^*(r) &= L_i^* a_{n_i}^*(r) \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

В соответствии с теоремой 2 настоящего параграфа коэффициенты (2.21), в свою очередь могут быть представлены в интервале (R_1, R_2) равномерно сходящимися рядами как

$$a_{n_i(r)} = \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ A_{ij} J_{n_i}(m_j r) + B_{ij} Y_{n_i}(m_j r) - J_{n_i}(m_j r) \int \frac{\left(\frac{l_i}{r^2} - k_j \right) [C_{ij} J_{n_i}(m_j r) + d_{ij} Y_{n_i}(m_j r)]^*}{J_{n_i}(m_j r) Y'_{n_i}(m_j r) - J'_{n_i}(m_j r)^*} \right.$$

$$\left. \frac{* Y_{n_i}(m_j r) dr}{* Y_{n_i}(m_j r)} + Y_{n_i}(m_j r) \int \frac{\left(\frac{l_i}{r^2} - k_j \right) [C_{ij} J_{n_i}(m_j r) + d_{ij} Y_{n_i}(m_j r)] J_{n_i}(m_j r) dr}{J_{n_i}(m_j r) Y'_{n_i}(m_j r) - J'_{n_i}(m_j r) Y_{n_i}(m_j r) dr} \right\};$$

$$a_{n_i}^*(r) = \sum_{j=1}^{\infty} [N_{ij} J_{n_i}(m_j r) + M_{ij} Y_{n_i}(m_j r)]$$

С коэффициентами

$$\left. \begin{aligned} A_{ij} &= \frac{\int_{R_1}^{R_2} r a_{n_i(r)} x_{ij} dr \int_{R_1}^{R_2} r y_{ij}^2 dr - \int_{R_1}^{R_2} r a_{n_i(r)} y_{ij} dr \int_{R_1}^{R_2} r x_{ij} y_{ij} dr}{\int_{R_1}^{R_2} r x_{ij}^2 dr \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r y_{ij}^2 d\varphi - \left(\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r x_{ij} y_{ij} d\varphi \right)^2}; \\ C_{ij} &= \frac{\int_{R_1}^{R_2} r a_{n_i(r)} y_{ij} dr \int_{R_1}^{R_2} r x_{ij}^2 dr - \int_{R_1}^{R_2} r a_{n_i(r)} x_{ij} dr \int_{R_1}^{R_2} r x_{ij} y_{ij} dr}{\int_{R_1}^{R_2} r x_{ij}^2 dr \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r y_{ij}^2 d\varphi - \left(\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r x_{ij} y_{ij} d\varphi \right)^2}; \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

$$B_{ij} = P_{ij} A_{ij}; d_{ij} = H_{ij} C_{ij}; A_{ij}^* = k_i^* A_{ij}; C_{ij}^* = L_i^* C_{ij}; B_{ij}^* = k_i^* P_{ij} A_{ij}; d_{ij}^* = L_i^* H_{ij} C_{ij}$$

Продолжение формулы (2.22) на следующей странице.

$$N_{ij} = \frac{\int_{R_1}^{R_2} a_{n_i(r)}^* x_{ij}^* r dr}{\int_{R_1}^{R_2} x_{ij}^{*2} r dr}; \quad N_{ij}^* = L_i^* N_{ij}; \quad M_{ij} = P_{ij}^* N_{ij}; \quad M_{ij}^* = L_i^* P_{ij}^* N_{ij}; \quad (2.22)$$

Здесь $x_{ij}^* = x_{ij}$ при замене в x_{ij}, P_{ij} на P_{ij}^* . Подставляя $a_{n_i}, b_{n_i(r)}, a_{n_i(r)}^*, b_{n_i(r)}^*$ из (2.21), в (2.22), получаем окончательные выражения для коэффициентов ряда (2.20), которые в точности совпадают с данными нами в определении. Составив интеграл, определяющий среднеквадратичную ошибку приближения данного выше ряда с коэффициентами (2.22) к функции $F(r, \varphi)$ в области D и рассматривая его как функцию параметров A_{ij}, C_{ij} и N_{ij} , изложенным выше приёмом можно проверить, что коэффициенты (2.22) соответствуют минимуму этого интеграла. Кроме того, всегда можно подобрать такие достаточно большие i и j , что этот интеграл станет меньше любого наперед заданного положительного числа ε . Видно также, что представление функции $F(r, \varphi)$ в виде ряда (2.20) является единственным, ибо в противном случае все коэффициенты этого ряда суть нули. Т.о. теорема доказана.

На основании изложенного определилась возможность формального оперирования с рассмотренными выше рядами.

§3. Термоупругий потенциал перемещений

Решение уравнений (1.1) будем искать в виде линейной комбинации четырех независимых функций Φ_ρ ($\rho = 0, 1, 2, 3$) Первая из них, называемая в дальнейшем термоупругим потенциалом перемещения, образует частное решение системы (1.1). Три остальные суть независимые решения уравнений Ламе. Полагая

$$\left. \begin{aligned} U_0 &= \frac{\beta^*}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} \\ V_0 &= \frac{\beta^*}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \varphi} \\ W_0 &= \frac{\beta^*}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

и подставляя в (1.1), получаем

$$\nabla^2 \Phi_0 = f(r, \varphi, z). \quad (3.2)$$

Считая в дальнейшем функцию $f(r, \varphi, z)$ гармонической в целом и беря операцию ∇^2 от обеих частей равенства (3.2), находим

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi_0 = 0.$$

Т.о. функция Φ_0 является бигармонической. Вследствие наложенных выше на $f(r, \varphi, z)$ ограничений, а также учитывая, что $f(r, \varphi, z)$ по своему физическому смыслу должна быть периодической с периодом 2π на основании

теоремы 3 можно полагать, что эта функция представима равномерно сходящимся рядом вида

$$f(r, \varphi, z) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_{ij} . \quad (3.3)$$

где Φ_{ij} суть (2.6), в котором n_i и m_j заменены соответственно на ν_i и β_j . При этом (3.3) не должно содержать непериодических слагаемых, в состав которых входят выражения вида $\varphi \cos \nu_i \varphi$ и $\varphi \sin \nu_i \varphi$, т.е. $l_i = 0$.

Введём обозначения

$$e^{\beta_j z} = z_1, \quad ze^{\beta_j z} = z_3, \quad J_{\nu_i}(\beta_j r) = R_1;$$

$$e^{-\beta_j z} = z_2, \quad ze^{-\beta_j z} = z_4, \quad Y_{\nu_i}(\beta_j r) = R_2;$$

$$J_{\nu_i}(\beta_j r) \int \frac{J_{\nu_i}(\beta_j r) Y_{\nu_i}(\beta_j r) dr}{J_{\nu_i}(\beta_j r) Y'_{\nu_i}(\beta_j r) - J'_{\nu_i}(\beta_j r) Y_{\nu_i}(\beta_j r)} = R_3; \quad J_{\nu_i}(\beta_j r) \int \frac{Y_{\nu_i}^2(\beta_j r) dr}{J_{\nu_i}(\beta_j r) Y'_{\nu_i}(\beta_j r) - J'_{\nu_i}(\beta_j r) Y_{\nu_i}(\beta_j r)} = R_4$$

$$Y_{\nu_i}(\beta_j r) \int \frac{J_{\nu_i}(\beta_j r) Y_{\nu_i}(\beta_j r) dr}{J_{\nu_i}(\beta_j r) Y'_{\nu_i}(\beta_j r) - J'_{\nu_i}(\beta_j r) Y_{\nu_i}(\beta_j r)} = R_5; \quad Y_{\nu_i}(\beta_j r) \int \frac{J_{\nu_i}^2(\beta_j r) dr}{J_{\nu_i}(\beta_j r) Y'_{\nu_i}(\beta_j r) - J'_{\nu_i}(\beta_j r) Y_{\nu_i}(\beta_j r)} = R_6$$

$$C_{1ij} \cos \nu_i \varphi + C_{9ij} \sin \nu_i \varphi = \theta_1; \quad C_{5ij} \cos \nu_i \varphi + C_{13ij} \sin \nu_i \varphi = \theta_5$$

$$C_{2ij} \cos \nu_i \varphi + C_{10ij} \sin \nu_i \varphi = \theta_2; \quad C_{6ij} \cos \nu_i \varphi + C_{14ij} \sin \nu_i \varphi = \theta_6$$

$$-C_{3ij} \cos \nu_i \varphi - C_{11ij} \sin \nu_i \varphi = \theta_3; \quad -C_{7ij} \cos \nu_i \varphi - C_{15ij} \sin \nu_i \varphi = \theta_7$$

$$-C_{4ij} \cos \nu_i \varphi - C_{12ij} \sin \nu_i \varphi = \theta_4; \quad -C_{8ij} \cos \nu_i \varphi - C_{16ij} \sin \nu_i \varphi = \theta_8$$

Тогда (3.2) представится как

$$\nabla^2 \Phi_{0ij} = z_1(R_1 \theta_1 + R_2 \theta_2 + R_3 \theta_3 + R_4 \theta_4 + R_5 \theta_5 + R_6 \theta_6) + z_2(R_1 \theta_5 + R_2 \theta_6 + R_3 \theta_7 + R_4 \theta_8 + \\ + R_5 \theta_7 + R_6 \theta_8) + z_3(R_1 \theta_3 + R_2 \theta_4) \frac{1}{2\beta_j} + z_4(R_1 \theta_7 + R_2 \theta_8) \frac{1}{2\beta_j};$$

Решение этого уравнения Φ_{0ij} ищем по обобщенному способу Фурье в виде

$$\Phi_{0ij} = z_1[f_{1(r)} \theta_1 + f_{2(\varphi)} R_1 + f_{3(r)} \theta_2 + f_{4(\varphi)} R_2 + f_{5(r)} \theta_3 + f_{6(\varphi)} R_3 + f_{7(r)} \theta_4 + f_{8(\varphi)} R_4 + \\ + f_{9(r)} \theta_5 + f_{10(\varphi)} R_5 + f_{11(r)} \theta_6 + f_{12(\varphi)} R_6] + f_{13(z)}[R_1 \theta_1 + R_2 \theta_2 + R_3 \theta_3 + R_4 \theta_4 + R_5 \theta_5 + R_6 \theta_6] + \\ + z_2[f_{14(r)} \theta_5 + f_{15(\varphi)} R_1 + f_{16(r)} \theta_6 + f_{17(\varphi)} R_2 + f_{18(r)} \theta_7 + f_{19(\varphi)} R_3 + f_{20(r)} \theta_8 + f_{21(\varphi)} R_4 + \\ + f_{22(r)} \theta_7 + f_{23(\varphi)} R_5 + f_{24(r)} \theta_8 + f_{25(\varphi)} R_6] + f_{26(z)}[R_1 \theta_5 + R_2 \theta_6 + R_3 \theta_7 + R_4 \theta_8 + R_5 \theta_7 + R_6 \theta_8] + \\ + z_3[f_{27(r)} \theta_3 + f_{28(\varphi)} R_1 + f_{29(r)} \theta_4 + f_{30(\varphi)} R_2] \frac{1}{2\beta_j} + f_{31(z)}[R_1 \theta_3 + R_2 \theta_4] \frac{1}{2\beta_j} + z_4[f_{32(r)} \theta_7 + \\ + f_{33(r)} R_1 + f_{34(r)} \theta_8 + f_{35(r)} R_2] \frac{1}{2\beta_j} + f_{36(z)}[R_1 \theta_7 + R_2 \theta_8] \frac{1}{2\beta_j} \quad (3.4)$$

где

$$f_{1(r)}, f_{3(r)}, f_{5(r)}, f_{7(r)}, f_{9(r)}, f_{11(r)}, f_{14(r)}, f_{16(r)}, f_{18(r)}, f_{20(r)}, f_{22(r)}, f_{24(r)}, f_{27(r)}, f_{29(r)}, f_{32(r)}, \\ f_{34(r)}, f_{2(\varphi)}, f_{4(\varphi)}, f_{6(\varphi)}, f_{8(\varphi)}, f_{10(\varphi)}, f_{12(\varphi)}, f_{15(\varphi)}, f_{17(\varphi)}, f_{19(\varphi)}, f_{21(\varphi)}, f_{23(\varphi)}, f_{25(\varphi)}, f_{28(\varphi)}, f_{30(\varphi)}, \\ f_{33(\varphi)}, f_{35(\varphi)}, f_{13(z)}, f_{26(z)}, f_{31(z)}, f_{36(z)}$$

- пока произвольные функции, зависящие соответственно только от r, φ, z .

Подставляя (3.4) в последнее уравнение (промежуточные действия – разделение

переменных и интегрирование – не приводятся) получаем окончательное выражение для термоупругого потенциала перемещения:

$$\begin{aligned}
\Phi_0 = & \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \{ e^{\beta_j z} [a_{0,1} J_{\nu_i}(\beta_j r) + a_{0,2} Y_{\nu_i}(\beta_j r) - J_{\nu_i}(\beta_j r)] \int \frac{\langle a_{0,3} J_{\nu_i}(\beta_j r) + a_{0,4} Y_{\nu_i}(\beta_j r) \rangle Y_{\nu_i}(\beta_j r) dr}{J_{\nu_i}(\beta_j r) Y'_{\nu_i}(\beta_j r) - J'_{\nu_i}(\beta_j r) Y_{\nu_i}(\beta_j r)} + \\
& + Y_{\nu_i}(\beta_j r) \int \frac{\langle a_{0,3} J_{\nu_i}(\beta_j r) + a_{0,4} Y_{\nu_i}(\beta_j r) \rangle J_{\nu_i}(\beta_j r) dr}{J_{\nu_i}(\beta_j r) Y'_{\nu_i}(\beta_j r) - J'_{\nu_i}(\beta_j r) Y_{\nu_i}(\beta_j r)} - J_{\nu_i}(\beta_j r) * \\
& * \int \frac{[-J_{\nu_i}(\beta_j r)] \int \frac{\langle a_{0,5} J_{\nu_i}(\beta_j r) + a_{0,6} Y_{\nu_i}(\beta_j r) \rangle Y_{\nu_i}(\beta_j r) dr}{J_{\nu_i}(\beta_j r) Y'_{\nu_i}(\beta_j r) - J'_{\nu_i}(\beta_j r) Y_{\nu_i}(\beta_j r)} + Y_{\nu_i}(\beta_j r) \int \frac{\langle a_{0,5} J_{\nu_i}(\beta_j r) + a_{0,6} Y_{\nu_i}(\beta_j r) \rangle J_{\nu_i}(\beta_j r) dr}{J_{\nu_i}(\beta_j r) Y'_{\nu_i}(\beta_j r) - J'_{\nu_i}(\beta_j r) Y_{\nu_i}(\beta_j r)}] Y_{\nu_i}(\beta_j r)}{J_{\nu_i}(\beta_j r) Y'_{\nu_i}(\beta_j r) - J'_{\nu_i}(\beta_j r) Y_{\nu_i}(\beta_j r)} dr + \\
& + Y_{\nu_i}(\beta_j r) * \\
& * \int \frac{[-J_{\nu_i}(\beta_j r)] \int \frac{\langle a_{0,5} J_{\nu_i}(\beta_j r) + a_{0,6} Y_{\nu_i}(\beta_j r) \rangle Y_{\nu_i}(\beta_j r) dr}{J_{\nu_i}(\beta_j r) Y'_{\nu_i}(\beta_j r) - J'_{\nu_i}(\beta_j r) Y_{\nu_i}(\beta_j r)} + Y_{\nu_i}(\beta_j r) \int \frac{\langle a_{0,5} J_{\nu_i}(\beta_j r) + a_{0,6} Y_{\nu_i}(\beta_j r) \rangle J_{\nu_i}(\beta_j r) dr}{J_{\nu_i}(\beta_j r) Y'_{\nu_i}(\beta_j r) - J'_{\nu_i}(\beta_j r) Y_{\nu_i}(\beta_j r)}] J_{\nu_i}(\beta_j r)}{J_{\nu_i}(\beta_j r) Y'_{\nu_i}(\beta_j r) - J'_{\nu_i}(\beta_j r) Y_{\nu_i}(\beta_j r)} dr + \\
& + e^{-\beta_j z} \left[a_{0,7} J_{\nu_i}(\beta_j r) + a_{0,8} Y_{\nu_i}(\beta_j r) - J_{\nu_i}(\beta_j r) \int \frac{\langle a_{0,9} J_{\nu_i}(\beta_j r) + a_{0,10} Y_{\nu_i}(\beta_j r) \rangle Y_{\nu_i}(\beta_j r) dr}{J_{\nu_i}(\beta_j r) Y'_{\nu_i}(\beta_j r) - J'_{\nu_i}(\beta_j r) Y_{\nu_i}(\beta_j r)} + \right. \\
& + Y_{\nu_i}(\beta_j r) \int \frac{\langle a_{0,9} J_{\nu_i}(\beta_j r) + a_{0,10} Y_{\nu_i}(\beta_j r) \rangle J_{\nu_i}(\beta_j r) dr}{J_{\nu_i}(\beta_j r) Y'_{\nu_i}(\beta_j r) - J'_{\nu_i}(\beta_j r) Y_{\nu_i}(\beta_j r)} - J_{\nu_i}(\beta_j r) * \\
& * \int \frac{[-J_{\nu_i}(\beta_j r)] \int \frac{\langle a_{0,11} J_{\nu_i}(\beta_j r) + a_{0,12} Y_{\nu_i}(\beta_j r) \rangle Y_{\nu_i}(\beta_j r) dr}{J_{\nu_i}(\beta_j r) Y'_{\nu_i}(\beta_j r) - J'_{\nu_i}(\beta_j r) Y_{\nu_i}(\beta_j r)} + Y_{\nu_i}(\beta_j r) \int \frac{\langle a_{0,11} J_{\nu_i}(\beta_j r) + a_{0,12} Y_{\nu_i}(\beta_j r) \rangle J_{\nu_i}(\beta_j r) dr}{J_{\nu_i}(\beta_j r) Y'_{\nu_i}(\beta_j r) - J'_{\nu_i}(\beta_j r) Y_{\nu_i}(\beta_j r)}] Y_{\nu_i}(\beta_j r)}{J_{\nu_i}(\beta_j r) Y'_{\nu_i}(\beta_j r) - J'_{\nu_i}(\beta_j r) Y_{\nu_i}(\beta_j r)} dr + \\
& + Y_{\nu_i}(\beta_j r) * \\
& * \int \frac{[-J_{\nu_i}(\beta_j r)] \int \frac{\langle a_{0,11} J_{\nu_i}(\beta_j r) + a_{0,12} Y_{\nu_i}(\beta_j r) \rangle Y_{\nu_i}(\beta_j r) dr}{J_{\nu_i}(\beta_j r) Y'_{\nu_i}(\beta_j r) - J'_{\nu_i}(\beta_j r) Y_{\nu_i}(\beta_j r)} + Y_{\nu_i}(\beta_j r) \int \frac{\langle a_{0,11} J_{\nu_i}(\beta_j r) + a_{0,12} Y_{\nu_i}(\beta_j r) \rangle J_{\nu_i}(\beta_j r) dr}{J_{\nu_i}(\beta_j r) Y'_{\nu_i}(\beta_j r) - J'_{\nu_i}(\beta_j r) Y_{\nu_i}(\beta_j r)}] J_{\nu_i}(\beta_j r)}{J_{\nu_i}(\beta_j r) Y'_{\nu_i}(\beta_j r) - J'_{\nu_i}(\beta_j r) Y_{\nu_i}(\beta_j r)} dr + \\
& + z e^{\beta_j z} [a_{0,13} J_{\nu_i}(\beta_j r) + a_{0,14} Y_{\nu_i}(\beta_j r) - J_{\nu_i}(\beta_j r) \int \frac{\langle a_{0,15} J_{\nu_i}(\beta_j r) + a_{0,16} Y_{\nu_i}(\beta_j r) \rangle Y_{\nu_i}(\beta_j r) dr}{J_{\nu_i}(\beta_j r) Y'_{\nu_i}(\beta_j r) - J'_{\nu_i}(\beta_j r) Y_{\nu_i}(\beta_j r)} + \\
& + Y_{\nu_i}(\beta_j r) \int \frac{\langle a_{0,15} J_{\nu_i}(\beta_j r) + a_{0,16} Y_{\nu_i}(\beta_j r) \rangle J_{\nu_i}(\beta_j r) dr}{J_{\nu_i}(\beta_j r) Y'_{\nu_i}(\beta_j r) - J'_{\nu_i}(\beta_j r) Y_{\nu_i}(\beta_j r)} + \\
& + z e^{-\beta_j z} \left[a_{0,17} J_{\nu_i}(\beta_j r) + a_{0,18} Y_{\nu_i}(\beta_j r) - J_{\nu_i}(\beta_j r) \int \frac{\langle a_{0,19} J_{\nu_i}(\beta_j r) + a_{0,20} Y_{\nu_i}(\beta_j r) \rangle Y_{\nu_i}(\beta_j r) dr}{J_{\nu_i}(\beta_j r) Y'_{\nu_i}(\beta_j r) - J'_{\nu_i}(\beta_j r) Y_{\nu_i}(\beta_j r)} + \right. \\
& + Y_{\nu_i}(\beta_j r) \int \frac{\langle a_{0,19} J_{\nu_i}(\beta_j r) + a_{0,20} Y_{\nu_i}(\beta_j r) \rangle J_{\nu_i}(\beta_j r) dr}{J_{\nu_i}(\beta_j r) Y'_{\nu_i}(\beta_j r) - J'_{\nu_i}(\beta_j r) Y_{\nu_i}(\beta_j r)}] + \\
& + z^2 e^{\beta_j z} \frac{1}{2\beta_j^2} [a_{0,5} J_{\nu_i}(\beta_j r) + a_{0,6} Y_{\nu_i}(\beta_j r)] + z^2 e^{-\beta_j z} \frac{1}{2\beta_j^2} [a_{0,11} J_{\nu_i}(\beta_j r) + a_{0,12} Y_{\nu_i}(\beta_j r)] \Big\} \cos \nu_i \varphi + \\
& + \left\{ e^{\beta_j z} \left[a_{0,21} J_{\nu_i}(\beta_j r) + a_{0,22} Y_{\nu_i}(\beta_j r) - J_{\nu_i}(\beta_j r) \int \frac{\langle a_{0,23} J_{\nu_i}(\beta_j r) + a_{0,24} Y_{\nu_i}(\beta_j r) \rangle Y_{\nu_i}(\beta_j r) dr}{J_{\nu_i}(\beta_j r) Y'_{\nu_i}(\beta_j r) - J'_{\nu_i}(\beta_j r) Y_{\nu_i}(\beta_j r)} + \right. \right. \\
& + Y_{\nu_i}(\beta_j r) \int \frac{\langle a_{0,23} J_{\nu_i}(\beta_j r) + a_{0,24} Y_{\nu_i}(\beta_j r) \rangle J_{\nu_i}(\beta_j r) dr}{J_{\nu_i}(\beta_j r) Y'_{\nu_i}(\beta_j r) - J'_{\nu_i}(\beta_j r) Y_{\nu_i}(\beta_j r)} - J_{\nu_i}(\beta_j r) *
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Продолжение формулы (3.5) на следующей странице.

$$\begin{aligned}
& * \int \frac{[-J_{v_i}(\beta_j r) \int \frac{\langle a_{0,25} J_{v_i}(\beta_j r) + a_{0,26} Y_{v_i}(\beta_j r) \rangle Y_{v_i}(\beta_j r) dr}{J_{v_i}(\beta_j r) Y'_{v_i}(\beta_j r) - J'_{v_i}(\beta_j r) Y_{v_i}(\beta_j r)} + Y_{v_i}(\beta_j r) \int \frac{\langle a_{0,25} J_{v_i}(\beta_j r) + a_{0,26} Y_{v_i}(\beta_j r) \rangle J_{v_i}(\beta_j r) dr}{J_{v_i}(\beta_j r) Y'_{v_i}(\beta_j r) - J'_{v_i}(\beta_j r) Y_{v_i}(\beta_j r)}] Y_{v_i}(\beta_j r)}{J_{v_i}(\beta_j r) Y'_{v_i}(\beta_j r) - J'_{v_i}(\beta_j r) Y_{v_i}(\beta_j r)} dr + \\
& + Y_{v_i}(\beta_j r) * \\
& * \int \frac{\left[-J_{v_i}(\beta_j r) \int \frac{\langle a_{0,25} J_{v_i}(\beta_j r) + a_{0,26} Y_{v_i}(\beta_j r) \rangle J_{v_i}(\beta_j r) dr}{J_{v_i}(\beta_j r) Y'_{v_i}(\beta_j r) - J'_{v_i}(\beta_j r) Y_{v_i}(\beta_j r)} + Y_{v_i}(\beta_j r) \int \frac{\langle a_{0,25} J_{v_i}(\beta_j r) + a_{0,26} Y_{v_i}(\beta_j r) \rangle Y_{v_i}(\beta_j r) dr}{J_{v_i}(\beta_j r) Y'_{v_i}(\beta_j r) - J'_{v_i}(\beta_j r) Y_{v_i}(\beta_j r)} \right] J_{v_i}(\beta_j r)}{J_{v_i}(\beta_j r) Y'_{v_i}(\beta_j r) - J'_{v_i}(\beta_j r) Y_{v_i}(\beta_j r)} dr + \\
& + e^{-\beta_j z} \left[a_{0,27} J_{v_i}(\beta_j r) + a_{0,28} Y_{v_i}(\beta_j r) - J_{v_i}(\beta_j r) \int \frac{\langle a_{0,29} J_{v_i}(\beta_j r) + a_{0,30} Y_{v_i}(\beta_j r) \rangle Y_{v_i}(\beta_j r) dr}{J_{v_i}(\beta_j r) Y'_{v_i}(\beta_j r) - J'_{v_i}(\beta_j r) Y_{v_i}(\beta_j r)} + \right. \\
& + Y_{v_i}(\beta_j r) \int \frac{\langle a_{0,29} J_{v_i}(\beta_j r) + a_{0,30} Y_{v_i}(\beta_j r) \rangle J_{v_i}(\beta_j r) dr}{J_{v_i}(\beta_j r) Y'_{v_i}(\beta_j r) - J'_{v_i}(\beta_j r) Y_{v_i}(\beta_j r)} - J_{v_i}(\beta_j r) * \\
& * \int \frac{[-J_{v_i}(\beta_j r) \int \frac{\langle a_{0,31} J_{v_i}(\beta_j r) + a_{0,32} Y_{v_i}(\beta_j r) \rangle Y_{v_i}(\beta_j r) dr}{J_{v_i}(\beta_j r) Y'_{v_i}(\beta_j r) - J'_{v_i}(\beta_j r) Y_{v_i}(\beta_j r)} + Y_{v_i}(\beta_j r) \int \frac{\langle a_{0,31} J_{v_i}(\beta_j r) + a_{0,32} Y_{v_i}(\beta_j r) \rangle J_{v_i}(\beta_j r) dr}{J_{v_i}(\beta_j r) Y'_{v_i}(\beta_j r) - J'_{v_i}(\beta_j r) Y_{v_i}(\beta_j r)}] Y_{v_i}(\beta_j r)}{J_{v_i}(\beta_j r) Y'_{v_i}(\beta_j r) - J'_{v_i}(\beta_j r) Y_{v_i}(\beta_j r)} dr + \\
& + Y_{v_i}(\beta_j r) * \\
& * \int \frac{[-J_{v_i}(\beta_j r) \int \frac{\langle a_{0,31} J_{v_i}(\beta_j r) + a_{0,32} Y_{v_i}(\beta_j r) \rangle Y_{v_i}(\beta_j r) dr}{J_{v_i}(\beta_j r) Y'_{v_i}(\beta_j r) - J'_{v_i}(\beta_j r) Y_{v_i}(\beta_j r)} + Y_{v_i}(\beta_j r) \int \frac{\langle a_{0,31} J_{v_i}(\beta_j r) + a_{0,32} Y_{v_i}(\beta_j r) \rangle J_{v_i}(\beta_j r) dr}{J_{v_i}(\beta_j r) Y'_{v_i}(\beta_j r) - J'_{v_i}(\beta_j r) Y_{v_i}(\beta_j r)}] J_{v_i}(\beta_j r) dr}{J_{v_i}(\beta_j r) Y'_{v_i}(\beta_j r) - J'_{v_i}(\beta_j r) Y_{v_i}(\beta_j r)} dr + \\
& + z e^{\beta_j z} [a_{0,33} J_{v_i}(\beta_j r) + a_{0,34} Y_{v_i}(\beta_j r) - J_{v_i}(\beta_j r) \int \frac{\langle a_{0,35} J_{v_i}(\beta_j r) + a_{0,36} Y_{v_i}(\beta_j r) \rangle Y_{v_i}(\beta_j r) dr}{J_{v_i}(\beta_j r) Y'_{v_i}(\beta_j r) - J'_{v_i}(\beta_j r) Y_{v_i}(\beta_j r)} + \\
& + Y_{v_i}(\beta_j r) \int \frac{\langle a_{0,35} J_{v_i}(\beta_j r) + a_{0,36} Y_{v_i}(\beta_j r) \rangle J_{v_i}(\beta_j r) dr}{J_{v_i}(\beta_j r) Y'_{v_i}(\beta_j r) - J'_{v_i}(\beta_j r) Y_{v_i}(\beta_j r)}] + z e^{-\beta_j z} [a_{0,37} J_{v_i}(\beta_j r) + a_{0,38} Y_{v_i}(\beta_j r) - \\
& - J_{v_i}(\beta_j r) \int \frac{\langle a_{0,39} J_{v_i}(\beta_j r) + a_{0,40} Y_{v_i}(\beta_j r) \rangle Y_{v_i}(\beta_j r) dr}{J_{v_i}(\beta_j r) Y'_{v_i}(\beta_j r) - J'_{v_i}(\beta_j r) Y_{v_i}(\beta_j r)} + Y_{v_i}(\beta_j r) \int \frac{\langle a_{0,39} J_{v_i}(\beta_j r) + a_{0,40} Y_{v_i}(\beta_j r) \rangle J_{v_i}(\beta_j r) dr}{J_{v_i}(\beta_j r) Y'_{v_i}(\beta_j r) - J'_{v_i}(\beta_j r) Y_{v_i}(\beta_j r)}] + \\
& + z^2 e^{\beta_j z} \frac{1}{8\beta_j^2} [a_{0,25} J_{v_i}(\beta_j r) + a_{0,26} Y_{v_i}(\beta_j r)] + z^2 e^{-\beta_j z} \frac{1}{8\beta_j^2} [a_{0,31} J_{v_i}(\beta_j r) + a_{0,32} Y_{v_i}(\beta_j r)] \Big\} \sin v_i \varphi
\end{aligned} \tag{3.5}$$

где

$$\left. \begin{aligned}
& a_{0,3} + 2\beta_j a_{0,13} + \frac{1}{4\beta_j^2} a_{0,5} = C_1; \quad a_{0,23} + 2\beta_j a_{0,33} + \frac{1}{4\beta_j^2} a_{0,25} = C_9; \quad a_{0,35} + \frac{1}{2\beta_j} a_{0,25} = \frac{1}{2\beta_j} C_{11} \\
& a_{0,4} + 2\beta_j a_{0,14} + \frac{1}{4\beta_j^2} a_{0,6} = C_2; \quad a_{0,24} + 2\beta_j a_{0,34} + \frac{1}{4\beta_j^2} a_{0,26} = C_{10}; \quad a_{0,36} + \frac{1}{2\beta_j} a_{0,26} = \frac{1}{2\beta_j} C_{12} \\
& a_{0,9} - 2\beta_j a_{0,17} + \frac{1}{4\beta_j^2} a_{0,11} = C_5; \quad a_{0,29} - 2\beta_j a_{0,37} + \frac{1}{4\beta_j^2} a_{0,31} = C_{13}; \quad a_{0,39} - \frac{1}{2\beta_j} a_{0,31} = -\frac{1}{2\beta_j} C_{15} \\
& a_{0,10} - 2\beta_j a_{0,18} + \frac{1}{4\beta_j^2} a_{0,12} = C_6; \quad a_{0,30} - 2\beta_j a_{0,38} + \frac{1}{4\beta_j^2} a_{0,32} = C_{14}; \quad a_{0,40} - \frac{1}{2\beta_j} a_{0,32} = -\frac{1}{2\beta_j} C_{16} \\
& a_{0,15} + \frac{1}{2\beta_j} a_{0,5} = \frac{1}{2\beta_j} C_3; \quad a_{0,19} - \frac{1}{2\beta_j} a_{0,11} = -\frac{1}{2\beta_j} C_7 \\
& a_{0,16} + \frac{1}{2\beta_j} a_{0,6} = \frac{1}{2\beta_j} C_4; \quad a_{0,20} - \frac{1}{2\beta_j} a_{0,12} = -\frac{1}{2\beta_j} C_8
\end{aligned} \right\} \tag{3.6}$$

Остальные коэффициенты (3.5), свободные от связей, остаются пока совершенно произвольными.

Как видно из (3.5) пятое и шестое слагаемые, а также другие подобные им, по отдельности не являются бигармоническими функциями т.е. не являются

решениями уравнения $\nabla^2 \nabla^2 \Phi_0 = 0$, тогда как совместно они удовлетворяют этому уравнению. По аналогии с псевдогармоническими функциями, обладающими указанными выше свойствами в отношении уравнения $\nabla^2 \Phi = 0$, [2] назовем эти слагаемые псевдобигармоническими функциями.

Как и в [2] следует отметить, что для интегрирования (3.2) условия гармоничности функции $f(r, \varphi, z)$ в целом вовсе не обязательно. Оно принято лишь для упрощения выкладок. В случае, если $f(r, \varphi, z)$ не может быть приведена к виду суммы произведений функций, зависящих от одной переменной, для интегрирования уравнения (3.2) необходимо прибегнуть к методам теории потенциала при условии наложения на $f(r, \varphi, z)$ некоторых весьма общих ограничений. Не останавливаясь на подробном разборе этих случаев заметим только, что принятый характер распределения температуры в теле не умаляет общности сделанных ниже выводов.

§4. Интегрирование уравнений Ламе

Термоупругий потенциал перемещения (3.5) позволяет перейти от системы неоднородных уравнений (1.1) к системе однородных уравнений (4.1)

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \mu) \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial r} - \mu \frac{U}{r^2} + \mu \nabla^2 U - \frac{2\mu}{r^2} \cdot \frac{\partial V}{\partial \varphi} &= 0 \\ \frac{(\lambda + \mu)}{r} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi} - \mu \frac{V}{r^2} + \mu \nabla^2 V + \frac{2\mu}{r^2} \cdot \frac{\partial U}{\partial \varphi} &= 0 \\ (\lambda + \mu) \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \mu \nabla^2 W &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Ввиду невозможности непосредственного использования решения уравнений Ламе, данного Б.Г. Галёркиным для случая прямоугольных координат [3], путем преобразования его к цилиндрическим координатам, будем искать решение системы (4.1) в следующем виде:

Развивая функцию перемещения Лява, применительно к трехмерному пространству [1], получаем

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r \partial z} \\ V_1 &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \varphi \partial z} \\ W_1 &= B \nabla^2 \Phi_1 + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

$$\text{где } B = -\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu};$$

Подставляя (4.2) в систему (4.1), после преобразований имеем $\nabla^2 \nabla^2 \Phi_1 = 0$.

Следовательно Φ_1 произвольная бигармоническая в целом функция трёх переменных также есть произвольная бигармоническая в целом функция трех переменных r, φ и z , а (4.2) суть решение системы (4.1). Полагаем далее

$$\left. \begin{aligned} U_2 &= \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial r \partial \varphi} + \frac{2B}{r} \cdot \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} \\ V_2 &= Br \nabla^2 \Phi_2 + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \varphi^2} - 2B \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \\ W_2 &= \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \varphi \partial z} \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Производя подстановку (4.3) в систему (4.1), получаем $\nabla^2 \nabla^2 \Phi_2 = 0$.

Следовательно Φ_2 также есть бигармоническая в целом функция трёх переменных r, φ и z , независимая притом от Φ_1 , а система (4.3) суть решение системы (4.1). Третью и последнюю функцию Φ_3 , независимую от двух первых, подберем таким образом, чтобы выраженные через неё напряжения удовлетворяли уравнениям упругого равновесия, представленным через эти напряжения.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= [\lambda(B+1) + 2\mu B] r \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \Phi_3 + 2[2\lambda(B+1) - \mu B] \nabla^2 \Phi_3 - 2\lambda(B+1) \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial z^2} + \\ &+ 2\mu \left[r \frac{\partial^3 \Phi_3}{\partial r^3} + 2(B+2) \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial r^2} \right]; \\ \sigma_\varphi &= \lambda(B+1) r \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \Phi_3 + 2[2\lambda(B+1) - \mu B] \nabla^2 \Phi_3 - 2\lambda(B+1) \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial z^2} + 2\mu * \\ &* \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^3 \Phi_3}{\partial r \partial \varphi^2} + \frac{2(B+1)}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial r^2} + \frac{2(B+3)}{r} \frac{\partial \Phi_3}{\partial r} \right]; \\ \sigma_z &= \lambda(B+1) \left(r \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \Phi_3 + 4 \nabla^2 \Phi_3 - 2 \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial z^2} \right) + 2\mu \left(r \frac{\partial^3 \Phi_3}{\partial r \partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial z^2} \right) \\ \tau_{r\varphi} &= \mu \left[B \frac{\partial}{\partial \varphi} \nabla^2 \Phi_3 + 2 \frac{\partial^3 \Phi_3}{\partial \varphi \partial r^2} + \frac{4(B+1)}{r} \left(\frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi} \right) \right]; \\ \tau_{zr} &= \mu \left[Br \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \Phi_3 + 2r \frac{\partial^3 \Phi_3}{\partial r^2 \partial z} + 2(B+3) \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial r \partial z} \right]; \\ \tau_{\varphi z} &= \mu \left[\frac{\partial^3 \Phi_3}{\partial r \partial z^2} + \frac{\partial^3 \Phi_3}{\partial r \partial \varphi \partial z} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial z^2} + \frac{2(B+1)}{r} \cdot \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial \varphi \partial z} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

Непосредственной подстановкой системы (4.4) в уравнение упругого равновесия, выраженные через напряжения, легко проверить, что указанная система является решением этих уравнений. При этом должно соблюдаться условие $-\nabla^2 \nabla^2 \Phi_3 = 0$. Т.о. Φ_3 является третьей бигармонической в целом функцией. Каждую из Φ_ρ , ($\rho=1, 2, 3$) будем искать в форме, аналогичной (3.5), но с неопределёнными коэффициентами $a_{\rho,s}$, где $\rho=1, 2, 3$, а $s=1 \div 40$.

§ 5. Термоупругие напряжения

Вследствие линейности уравнений (1.1) обобщенные компоненты тензора напряжений представляются суммой четырёх составляющих от функций Φ_ρ , ($\rho = 1, 2, 3$), т.е.

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_r &= \frac{\lambda(\lambda+2\mu)}{\beta^*} \nabla^2 \Phi_0 + \lambda(B+1) \left(r \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \Phi_3 + 4 \nabla^2 \Phi_3 - 2 \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \nabla^2 \Phi_2 + \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \Phi_1 \right) + \\
 &+ 2\mu B \left(r \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \Phi_3 - \nabla^2 \Phi_3 \right) + 2\mu \left[r \frac{\partial^3 \Phi_3}{\partial r^3} + 2(B+2) \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial r^2} + \frac{\lambda+2\mu}{\beta^*} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2 \partial z} + \right. \\
 &+ \left. \frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial r^2 \partial \varphi} + \frac{2B}{r} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial r \partial \varphi} - \frac{2B}{r^2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} \right] - \beta^* T; \\
 \sigma_\varphi &= \frac{\lambda(\lambda+2\mu)}{\beta^*} \nabla^2 \Phi_0 + \lambda(B+1) \left(r \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \Phi_3 + 4 \nabla^2 \Phi_3 - 2 \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \nabla^2 \Phi_2 + \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \Phi_1 \right) - \\
 &- \left(2\mu B \nabla^2 \Phi_3 - \frac{\partial}{\partial \varphi} \nabla^2 \Phi_2 \right) + 2\mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^3 \Phi_3}{\partial r \partial \varphi^2} + \frac{2(B+1)}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial r^2} + \frac{2(B+3)}{r} \frac{\partial \Phi_3}{\partial r} + \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 \Phi_3}{\partial \varphi^3} - \frac{2(B-1)}{r} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial r \partial \varphi} + \frac{2B}{r^2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} + \frac{\lambda+2\mu}{\beta^*} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial \varphi^2 \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r \partial z} \right] - \beta^* T; \\
 \sigma_z &= \frac{\lambda(\lambda+2\mu)}{\beta^*} \nabla^2 \Phi_0 + \lambda(B+1) \left(r \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \Phi_3 + 4 \nabla^2 \Phi_3 - 2 \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \nabla^2 \Phi_2 + \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \Phi_1 \right) + \\
 &+ 2\mu B \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \Phi_1 + 2\mu \left[r \frac{\partial^3 \Phi_3}{\partial r \partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial z^2} + \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial z^3} + \frac{\lambda+2\mu}{\beta^*} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial z^2} + \frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial \varphi \partial z^2} \right] - \beta^* T; \\
 \tau_{r\varphi} &= \mu \left[B \left(r \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \Phi_2 + \frac{\partial}{\partial \varphi} \nabla^2 \Phi_3 \right) + 2 \frac{\partial^3 \Phi_3}{\partial r^2 \partial \varphi} + \frac{4(B+1)}{r} \left(\frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi} \right) + 2 \frac{\lambda+2\mu}{\beta^*} * \right. \\
 &* \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \varphi} \right) + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial r \partial \varphi \partial z} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \varphi \partial z} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial r \partial \varphi^2} + \frac{2(B-1)}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \varphi^2} + 2B \left(-\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \right) \right] \\
 \tau_{rz} &= \mu \left[B \left(r \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \Phi_3 + \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \Phi_1 \right) + 2r \frac{\partial^3 \Phi_3}{\partial r^2 \partial z} + 2(B+3) \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial r \partial z} + 2 \frac{\lambda+2\mu}{\beta^*} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial r \partial z} + \right. \\
 &+ \left. 2 \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial r \partial z^2} + 2 \frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial r \partial \varphi \partial z} + \frac{2B}{r} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \varphi \partial z} \right]; \\
 \tau_{\varphi z} &= \mu \left[B \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \nabla^2 \Phi_1 + r \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \Phi_2 \right) + 2 \frac{\lambda+2\mu}{\beta^*} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \varphi \partial z} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial \varphi \partial z^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial \varphi^2 \partial z} - \right. \\
 &- \left. 2B \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^3 \Phi_3}{\partial r \partial z^2} + \frac{\partial^3 \Phi_3}{\partial r \partial \varphi \partial z} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial z^2} + \frac{2(B+1)}{r} \cdot \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial \varphi \partial z} \right];
 \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

Для определения неизвестных коэффициентов применим к (5.1) граничные условия, приведенные в §1. В самом общем случае с учетом (3.6) получаем систему 108-ми линейных уравнений относительно этих коэффициентов.

Решение этой системы может быть проведено, например, с помощью счетно-решающего устройства. При этом решение её единственно, и

количество коэффициентов тождественно равных нулю из числа неизвестных не будет превышать 52-х.

В случае, если на поверхностях цилиндра приложены внешние силы, решение задач будет определяться суммой термоупругих напряжений (5.1) при граничных условиях данных в §1 и напряжений, отвечающих этим внешним силам.

Список литературы

1. Ляв А. Математическая теория упругости. М.: ОНТИ, 1935.
2. Мелан Э. и Паркус Г. Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. - М.: Физматгиз, 1958.
3. Лебедев Н.Н. Температурные напряжения в теории упругости. - М.: ОНТИ, 1937.
4. Майзель В.М. Температурная задача теории упругости. - К.: изд. АН УССР, 1951.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПО ДВИЖЕНИЮ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Решение задач по движению твердого тела в вязкой несжимаемой жидкости во многих случаях сводится к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка, которое не всегда может быть разрешено в квадратурах. В то же время получение такого решения желательно, поскольку оно существенно упрощает качественное и количественное исследование рассматриваемого физического процесса, сокращает материальные затраты и временной фактор по сравнению с разностными методами решения этих задач.

Известно, что линейное дифференциальное уравнение второго порядка всегда может быть сведено к нелинейному дифференциальному первого порядка типа Риккати [1]. Рассмотрим приём, позволяющий получить приближенное решение этого уравнения в конечном виде с достаточной для практических расчётов точностью применительно к движению цилиндра в вязкой жидкости.

Пусть цилиндр, находясь в набегающем, вдоль продольной его оси, потоке, начинает двигаться от некоторой точки отсчета равной нулю под действием силы тяги.

Уравнение движения цилиндра будет иметь вид

$$mx'' = T_x - F_x, \quad (1)$$

где m - масса цилиндра,

T_x — сила тяги, являющаяся функцией от x ;

F_x - полная сила сопротивления движению цилиндра.

При этом
$$F_x = C_f s \rho \cdot \frac{(x' + V_0)^2}{2},$$

где C_f - коэффициент полного сопротивления цилиндра,

s - площадь лобового сопротивления,

ρ - плотность жидкости,

V_0 - скорость набегающего потока.

Поскольку
$$\frac{dx}{dt} = x' = V,$$

уравнение (1) можно преобразовать к виду

$$\frac{dV}{dt} = \frac{T_x}{m} - \frac{C_f s \rho}{2m} V + V_0^2. \quad (2)$$

Данное уравнение есть уравнение типа Риккати, которое в общем виде не интегрируется. Заменим в правой части (2) квадратичную зависимость F_x от V на ее среднее значение $F_{cp} = const$ по интегральной теореме о среднем, взяв за основу для вычисления F_{cp} работу A этой силы на рассматриваемом участке x_0 движения цилиндра, т.е.

$$A = \int_0^{x_0} F_x dx = F_{cp} x_0 .$$

Откуда

$$F_{cp} = \frac{1}{x_0} \int_0^{x_0} F_x dx . \quad (3)$$

Преобразуем далее

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = V \cdot \frac{dV}{dx} . \quad (4)$$

Подставляя (4) в (2) и заменяя F_x на F_{cp} получаем

$$V \frac{dV}{dx} = \frac{1}{m} T_x - F_{cp} . \quad (5)$$

После преобразований, с учетом (3), имеем

$$V = \sqrt{\frac{2}{m} \int (T_x - \frac{1}{x_0} \int_0^{x_0} F_x dx) dx} + C , \quad (6)$$

где C - постоянная интегрирования, которая находится из граничного условия, например, при $x = 0$, $V = 0$.

Для нахождения F_{cp} достаточно в (3) вместо F_x подставить его значение, выраженное через V по формуле (6).

Таким образом, уравнение (2) проинтегрировано. Указанный приём легко распространяется на случай, когда в правую часть уравнения (1) входит сила, являющаяся функцией V^3 , и т.д.

Определим погрешность ΔV , вводимую в расчеты в результате замены F_x на F_{cp} .

Пусть V_1 - расчетная скорость движения цилиндра при F_x ;

V_2 - расчетная скорость при F_{cp} , тогда из (5):

$$\left. \begin{aligned} V_1 \frac{dV_1}{dx} &= \frac{1}{m} (T_x - F_x) \\ V_2 \frac{dV_2}{dx} &= \frac{1}{m} (T_x - F_{cp}) = \frac{1}{m} \left(T_x - \frac{1}{x_0} \int_0^{x_0} F_x dx \right) \end{aligned} \right\}$$

Исключая из системы T_x , получаем

$$V_1 \frac{dV_1}{dx} - V_2 \frac{dV_2}{dx} = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{x_0} \int_0^{x_0} F_x dx - F_x \right),$$

или после интегрирования

$$\Delta V = V_1 - V_2 = \frac{2}{m(V_1 + V_2)} \int \Delta F dx \approx \frac{1}{mV} \int \Delta F dx .$$

Анализ этого выражения показывает, что с увеличением массы, скорости движения, а также плавности изменения последней, достигается необходимая точность расчетов.

В качестве примера применения метода возьмем дифференциальное уравнение, решаемое в квадратурах.

Пусть

$$\frac{T_x}{m} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3},$$

$$\frac{C_f s \rho}{2m} V^2 = F_x = V^2.$$

Тогда (2) примет вид

$$\frac{dV}{dt} = -V^2 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$$

или с учетом (4), после простых преобразований

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 2\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right), \text{ где } y = V^2.$$

Точное решение этого уравнения будет

$$y = \frac{1}{x^2} + C_1 e^{-2x},$$

где C_1 - постоянная интегрирования.

Возьмем за точку отсчета движения тела $x=1$. И пусть в этой точке $V=0$.

Тогда $C_1 = -e^2$, а V , в ранее принятом обозначении,

$$V_1 = \sqrt{\frac{1}{x^2} e^{-2(x-1)}}.$$

С другой стороны, согласно (5)

$$V \frac{dV}{dx} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} - F_{cp},$$

откуда с учётом принятого обозначения V

$$V_2 = \sqrt{-\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - 2F_{cp}x + C_2}.$$

При $x=1$, $C_2 = 2F_{cp} + 1$ и, следовательно,

$$V_2 = \sqrt{-\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - 2F_{cp}x + 2F_{cp} + 1}.$$

Для определения F_{cp} воспользуемся (3)

$$F_{cp}(x_0 - 1) = \int_1^{x_0} V_2^2 dx = -2 \ln x_0 - \frac{1}{x_0} + x_0 - F_{cp}(x_0^2 - 2x_0 + 1)$$

$$\text{Тогда } F_{cp} = \frac{-2 \ln x_0 - \frac{1}{x_0} + x_0}{x(x_0 - 1)}$$

Окончательно имеем

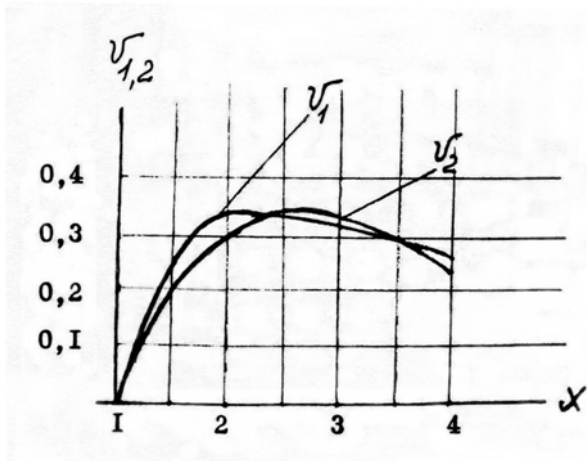
$$V_2 = \sqrt{-\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - 2 \frac{-2 \ln x_0 - \frac{1}{x_0} + x_0}{x_0(x_0 - 1)}(x - 1) + 1}.$$

Задаваясь значениями x_0 , строим графики V_1 и V_2 . Следует обратить внимание на то, что начальное и конечное значения x_0 не могут быть выбраны

произвольно. Они зависят от функционального значения T_x , которое определяет диапазон действительных чисел V_2 .

Пусть $x_0 = 4$, тогда

$$V_2 = \sqrt{-\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - 0,163(x-1) + 1}.$$



Подставляя в выражения V_1 и V_2 значения x от 1 до 4, строим их графики

Средняя погрешность V_2 относительно V_1 при принятом произвольном значении T_x составляет около 5%. Для получения более точного результата, если будет рассматриваться движение твердого тела в вязкой жидкости, необходимо наличие ранее упомянутых условий.

Данная методика нашла практическое применение в совместной работе предприятия и ЛКИ при расчетах изделий 24 с новыми принципами действия.

Список литературы

1. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.
2. Лауфер М. Я. Об одном методе решения задачи по движению твёрдого тела в вязкой несжимаемой жидкости. //Вопросы технологии, эффективности производства и надёжности. Вып. 15. - Северодвинск.: Севмашвуз, НТО им. акад. Крылова А.Н., 1997. С.66-70.

ЭФФЕКТ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОГО ИЗМЕНЕНИЯ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Известны два механизма, приводящие к изменению частоты электромагнитного излучения: эффект Доплера и гравитационное поле. Других твердо установленных механизмов, способных вызвать изменение частоты колебаний электромагнитного излучения пока не известно. Ниже приводится описание ещё одного явления по изменению частоты электромагнитного излучения, связанного, по-видимому, с действием второго закона термодинамики и вытекающего из решения уравнений Максвелла.

Описание эффекта

1. Физические условия и сущность эффекта

Движение электромагнитной волны генерируемой неподвижным относительно наблюдателя источником в вакууме свободном от гравитационного поля, описывается уравнениями Максвелла. Эти уравнения, если принять, что

$$\mu = 1, \quad \varepsilon = 1, \quad \lambda = 0, \text{ где}$$

μ - магнитная проницаемость,

ε - диэлектрическая проницаемость,

λ - удельная проводимость.

и для наглядности дальнейшего рассмотрения считать, что источник генерирует плоскую монохроматическую волну, с помощью простых преобразований приводятся к двум волновым уравнениям вида (1). Вследствие идентичности их формы по электрической и магнитной составляющим излучения, будет рассматриваться изменение только электрической составляющей этого излучения. Существующее решение волновых уравнений для принятых выше условий показывает, что электромагнитная монохроматическая волна с удалением от источника её генерации должна сохранять неизменными частоту и амплитуду.

Однако, как будет показано ниже в (3), из полученного более общего решения волнового уравнения следует, что это положение является неточным, частота волны с удалением от источника генерации уменьшается, а амплитуда растет.

2. Описание нового метода разделения переменных, примененного для получения более общего решения волнового уравнения и обоснование этого метода

Как известно, для решения задач математической физики во многих случаях применим метод Фурье разделения переменных. Он заключается в том, что решение дифференциального уравнения в частных производных (или в дальнейшем для краткости - просто уравнения) от n независимых переменных находится в виде произведения n функций, зависящих только от одной из переменных или суммы некоторого числа этих произведений. В последнем

случае на слагаемые налагается условие, чтобы каждое из них удовлетворяло рассматриваемому уравнению.

Не останавливаясь на подробном рассмотрении метода Фурье ввиду его известности, отметим следующее:

Существует возможность обобщения этого метода, которое заключается в том, что на решение уравнения от n независимых переменных, которое находится в виде произвольного числа слагаемых, являющихся, в свою очередь, произведением n неизвестных функций, зависящих только от одной переменной, не налагается условие, чтобы по отдельности эти слагаемые являлись решениями рассматриваемого уравнения. Решение по предлагаемому методу, также как и метод Фурье, даёт возможность разделить переменные в уравнении. Найденные при этом интегралы, ввиду отброшенного ограничения, являются более общими, чем интегралы, полученные методом Фурье, и содержат последние в качестве некоторого частного случая

Решим уравнение

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial x_2^2}, \quad (1)$$

где c - скорость света в вакууме; t - время; x - расстояние;

$x_1 = ct$; $x_2 = x$; E - напряженность электрического поля.

Вначале рассмотрим наиболее простой случай, когда частное решение находится в виде суммы двух слагаемых, т.е.

$$E = X_{1,1}(x_1)X_{1,2}(x_2) + X_{2,1}(x_1)X_{2,2}(x_2) \quad (2)$$

На слагаемые (2) не налагается условие, чтобы каждое из них удовлетворяло уравнению (1) (как это имеет место по методу Фурье) $X_{1,1}(x_1)X_{1,2}(x_2)$, $X_{2,1}(x_1)X_{2,2}(x_2)$, обозначаемые в дальнейшем, как $X_{1,1}$, $X_{1,2}$, $X_{2,1}$, $X_{2,2}$, - функции, зависящие соответственно от одной переменной x_1 или x_2 .

Здесь и в дальнейшем первая цифра индексации X , обозначает порядковый номер функции. Вторая цифра указывает переменную, от которой зависит эта функция. Подставляя (2) в (1), после простых преобразований, имеем:

$$\left(\frac{X''_{1,1}}{X_{1,1}} - \frac{X''_{1,2}}{X_{1,2}} \right) \frac{X_{1,1}}{X_{2,1}} = \left(-\frac{X''_{2,1}}{X_{2,1}} + \frac{X''_{2,2}}{X_{2,2}} \right) \frac{X_{2,2}}{X_{1,2}}.$$

Полагаем

$$\frac{X''_{1,2}}{X_{1,2}} = -n_1^2, \quad \frac{X''_{2,1}}{X_{2,1}} = -n_2^2, \quad (3)$$

где n_1 и n_2 - произвольные постоянные, после чего получаем:

$$\left(\frac{X''_{1,1}}{X_{1,1}} + n_1^2 \right) \frac{X_{1,1}}{X_{2,1}} = \left(\frac{X''_{2,2}}{X_{2,2}} + n_2^2 \right) \frac{X_{2,2}}{X_{1,2}}.$$

Левая часть последнего равенства зависит только от x_1 и не зависит от x_2 , а правая наоборот. Следовательно, каждая из них не зависит ни от x_1 , ни от x_2 , т.е. они постоянны. Обозначим эту постоянную через m . Тогда

$$\begin{aligned} \left(\frac{X''_{1,1}}{X_{1,1}} + n_1^2 \right) \frac{X_{1,1}}{X_{2,1}} &= m; \\ \left(\frac{X''_{2,2}}{X_{2,2}} + n_2^2 \right) \frac{X_{2,2}}{X_{1,2}} &= m. \end{aligned} \quad (4)$$

Таким образом, переменные разделились. После подстановки результатов интегрирования (3) и (4) в (2), получаем решение уравнения (1) в виде:

$$\begin{aligned} E = & \left(\frac{m}{2n} C_2^* x_1 \cos nx_1 - \frac{m}{2n} C_1^* x_1 \sin nx_1 + C_3^* \cos nx_1 + C_4^* \sin nx_1 \right) * \\ & * (C_1 \cos nx_2 + C_2 \sin nx_2) + \left(\frac{m}{2n} C_2 x_2 \cos nx_2 - \frac{m}{2n} C_1 x_2 \sin nx_2 + \right. \\ & \left. + C_3 \cos nx_2 + C_4 \sin nx_2 \right) (C_1^* \cos nx_1 + C_2^* \sin nx_1), \end{aligned} \quad (5)$$

где $C_1^* \div C_4^*$ и $C_1 \div C_4$ - постоянные интегрирования. При интегрировании (3) и (4) для упрощения записи решения (5) было принято $(n_1) = (n_2) = n$.

Указанное условие для постоянных n_j , $j = 1, 2, \dots$ в подобных же случаях будет соблюдаться и в дальнейшем. Кроме того, любую совокупность постоянных, являющуюся множителем каждой функции - слагаемого, входящую в решение, будем обозначать как a_i , где $i = 1, 2, 3, \dots$ определяет порядковый номер функции - слагаемого. Например, с учетом принятых обозначений для постоянных (5) запишется как

$$\begin{aligned} E = & (a_1 x_1 \cos nx_1 + a_2 x_1 \sin nx_1 + a_3 \cos nx_1 + a_4 \sin nx_1) (a_5 \cos nx_2 + a_6 \sin nx_2) + \\ & + (a_7 x_2 \cos nx_2 + a_8 x_2 \sin nx_2 + a_9 \cos nx_2 + a_{10} \sin nx_2) (a_{11} \cos nx_1 + a_{12} \sin nx_1) \end{aligned} \quad (6)$$

Из (6), видно, что оно отличается от решения уравнения (1), найденного методом Фурье. Последнее содержится в решении (6) как его некоторая частная составляющая.

Рассмотрим далее случай, когда частное решение уравнения находится по предлагаемому методу в виде суммы, например, пяти слагаемых, т.е.

$$E = X_{1,1} X_{1,2} + X_{2,1} X_{2,2} + X_{3,1} X_{3,2} + X_{4,1} X_{4,2} + X_{5,1} X_{5,2}. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (1) после простых преобразований получаем:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{X''_{1,1}}{X_{1,1}} - \frac{X''_{1,2}}{X_{1,2}} \right) \frac{X_{1,1}}{X_{5,1}} + \left(\frac{X''_{2,1}}{X_{2,1}} - \frac{X''_{2,2}}{X_{2,2}} \right) \frac{X_{2,1} X_{2,2}}{X_{5,1} X_{1,2}} + \left(\frac{X''_{3,1}}{X_{3,1}} - \frac{X''_{3,2}}{X_{3,2}} \right) \frac{X_{3,1} X_{3,2}}{X_{5,1} X_{1,2}} + \\ & + \left(\frac{X''_{4,1}}{X_{4,1}} - \frac{X''_{4,2}}{X_{4,2}} \right) \frac{X_{4,1} X_{4,2}}{X_{5,1} X_{1,2}} + \left(\frac{X''_{5,1}}{X_{5,1}} - \frac{X''_{5,2}}{X_{5,2}} \right) \frac{X_{5,2}}{X_{1,2}} = 0. \end{aligned}$$

Полагаем

$$\frac{X''_{1,2}}{X_{1,2}} = -n^2, \quad \frac{X''_{5,1}}{X_{5,1}} = -n^2. \quad (8)$$

Прибавим и отнимем во втором, третьем и четвёртом выражениях, стоящих в скобках, по n^2 . Тогда с учётом (8), имеем:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{X''_{1,1}}{X_{1,1}} + n^2 \right) \frac{X_{1,1}}{X_{5,1}} + \left(\frac{X''_{2,1}}{X_{2,1}} + n^2 - \frac{X''_{2,2}}{X_{2,2}} - n^2 \right) \frac{X_{2,2}X_{2,1}}{X_{1,2}X_{5,1}} + \left(\frac{X''_{3,1}}{X_{3,1}} + n^2 - \frac{X''_{3,2}}{X_{3,2}} - n^2 \right) \frac{X_{3,2}X_{3,1}}{X_{1,2}X_{5,1}} + \\ & + \left(\frac{X''_{4,1}}{X_{4,1}} + n^2 - \frac{X''_{4,2}}{X_{4,2}} - n^2 \right) \frac{X_{4,2}X_{4,1}}{X_{1,2}X_{5,1}} - \left(\frac{X''_{5,2}}{X_{5,2}} + n^2 \right) \frac{X_{5,2}}{X_{1,2}} = 0. \end{aligned}$$

Полагая

$$\begin{aligned} & \left(\frac{X''_{2,1}}{X_{2,1}} + n^2 \right) \frac{X_{2,1}}{X_{5,1}} = m \\ & \left(\frac{X''_{4,2}}{X_{4,2}} + n^2 \right) \frac{X_{4,2}}{X_{1,2}} = m \end{aligned} \quad (9)$$

m - произвольная постоянная, приходим к выражению:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{X''_{1,1}}{X_{1,1}} + n^2 \right) \frac{X_{1,1}}{X_{5,1}} + m \frac{X_{2,2}}{X_{1,2}} - \left(\frac{X''_{2,2}}{X_{2,2}} + n^2 \right) \frac{X_{2,1}X_{2,2}}{X_{5,1}X_{1,2}} + \left(\frac{X''_{3,1}}{X_{3,1}} + n^2 - \frac{X''_{3,2}}{X_{3,2}} - n^2 \right) \frac{X_{3,1}X_{3,2}}{X_{1,2}X_{5,1}} + \\ & + m \frac{X_{4,1}}{X_{5,1}} - \left(\frac{X''_{4,1}}{X_{4,1}} + n^2 \right) \frac{X_{4,2}X_{4,1}}{X_{1,2}X_{5,1}} - \left(\frac{X''_{5,2}}{X_{5,2}} + n^2 \right) \frac{X_{5,2}}{X_{1,2}} = 0. \end{aligned}$$

Прибавим и отнимем в левой части последнего равенства

$$m \frac{X_{2,1}X_{3,2}}{X_{5,1}X_{1,2}} \text{ и } m \frac{X_{3,1}X_{4,2}}{X_{5,1}X_{1,2}}$$

и примем

$$\begin{aligned} & \left(\frac{X''_{3,1}}{X_{3,1}} + n^2 \right) \frac{X_{3,1}}{X_{5,1}} + m \frac{X_{2,1}}{X_{5,1}} = m \\ & \left(\frac{X''_{3,2}}{X_{3,2}} + n^2 \right) \frac{X_{3,2}}{X_{1,2}} + m \frac{X_{4,2}}{X_{1,2}} = m \end{aligned} \quad (10)$$

С учётом (10) получаем:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{X''_{1,1}}{X_{1,1}} + n^2 \right) \frac{X_{1,1}}{X_{5,1}} + m \frac{X_{2,2}}{X_{1,2}} - \left(\frac{X''_{2,2}}{X_{2,2}} + n^2 \right) \frac{X_{2,2}X_{2,1}}{X_{1,2}X_{5,1}} + m \frac{X_{3,2}}{X_{1,2}} - m \frac{X_{3,2}X_{2,1}}{X_{1,2}X_{5,1}} + m \frac{X_{3,1}}{X_{5,1}} + \\ & + m \frac{X_{4,2}X_{3,1}}{X_{1,2}X_{5,1}} + m \frac{X_{4,1}}{X_{5,1}} - \left(\frac{X''_{4,1}}{X_{4,1}} + n^2 \right) \frac{X_{4,1}X_{4,2}}{X_{1,2}X_{5,1}} - \left(\frac{X''_{5,2}}{X_{5,2}} + n^2 \right) \frac{X_{5,2}}{X_{1,2}} = 0. \end{aligned}$$

Прибавим и отнимем в левой части этого равенства

$$m \frac{X_{2,1}X_{4,2}}{X_{3,1}X_{1,2}}$$

и положим

$$\begin{aligned} \left(\frac{X''_{2,2}}{X_{2,2}} + n^2 \right) \frac{X_{2,2}}{X_{1,2}} + m \frac{X_{3,2}}{X_{1,2}} + m \frac{X_{4,2}}{X_{1,2}} &= m; \\ \left(\frac{X''_{4,1}}{X_{4,1}} + n^2 \right) \frac{X_{4,1}}{X_{5,1}} - m \frac{X_{3,1}}{X_{5,1}} - m \frac{X_{2,1}}{X_{5,1}} &= m, \end{aligned} \quad (11)$$

после чего имеем:

$$\begin{aligned} \left(\frac{X''_{1,1}}{X_{1,1}} + n^2 \right) \frac{X_{1,1}}{X_{5,1}} - m \frac{X_{2,1}}{X_{5,1}} - m \frac{X_{3,1}}{X_{5,1}} + m \frac{X_{4,1}}{X_{5,1}} &= \\ = \left(\frac{X''_{5,2}}{X_{5,2}} + n^2 \right) \frac{X_{5,2}}{X_{1,2}} + m \frac{X_{4,2}}{X_{1,2}} - m \frac{X_{3,2}}{X_{1,2}} - m \frac{X_{2,2}}{X_{1,2}}. \end{aligned}$$

Левая часть этого равенства не зависит от x_2 , а правая от x_1 ,

следовательно:

$$\begin{aligned} \left(\frac{X''_{1,1}}{X_{1,1}} + n^2 \right) \frac{X_{1,1}}{X_{5,1}} - m \frac{X_{2,1}}{X_{5,1}} - m \frac{X_{3,1}}{X_{5,1}} + m \frac{X_{4,1}}{X_{5,1}} &= m; \\ \left(\frac{X''_{5,2}}{X_{5,2}} + n^2 \right) \frac{X_{5,2}}{X_{1,2}} + m \frac{X_{4,2}}{X_{1,2}} - m \frac{X_{3,2}}{X_{1,2}} - m \frac{X_{2,2}}{X_{1,2}} &= m. \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, переменные разделены, а уравнения (8) ÷ (12) интегрируются.

В случае, если частное решение находится в виде M слагаемых, то в символической, форме это решение может быть представлено как

$$E = X_1^{M-1} X_2^0 + X_1^{M-2} X_2^1 + \dots + X_1^k X_2^{M-1-k} + \dots + X_1 X_2^{M-2} + X_1^0 X_2^{M-1} = (X_1 + X_2)^{M-1}, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} X_1^k &= a_N x_1^k \cos nx_1 + a_{N+1} x_1^k \sin nx_1 + a_{N+2} x_1^{k-1} \cos nx_1 + a_{N+3} x_1^{k-1} \sin nx_1 + \dots \\ &+ a_{N+2k} \cos nx_1 + a_{N+2k+1} \sin nx_1; \\ X_2^{M-1-k} &= a_{N+2k+2} x_2^{M-1-k} \cos nx_2 + a_{N+2k+3} x_2^{M-1-k} \sin nx_2 + a_{N+2k+4} x_2^{M-2-k} \cos nx_2 + \\ &a_{N+2k+5} x_2^{M-2-k} \sin nx_2 + \dots + a_{N+2M-2} \cos nx_2 + a_{N+2M-1} \sin nx_2. \end{aligned}$$

N - порядковый номер.

Для сравнения ниже приводится частное решение уравнения (1), найденное по методу Фурье:

$$E = (a_1 \cos nx_1 + a_2 \sin nx_1)(a_3 \cos nx_2 + a_4 \sin nx_2). \quad (14)$$

Итак, интегрируя уравнение (1) с помощью обобщающего метода, и, ограничиваясь, с целью упрощения при последующем рассмотрении и обосновании метода, линейными составляющими решения от множителей t и x , получаем:

$$\begin{aligned}
E = & \sum_{i=1}^{\infty} [(a_{1,i} \text{Cos} n_i ct + a_{2,i} \text{Sinn}_i ct)(b_{1,i} \text{Cos} n_i x + b_{2,i} \text{Sinn}_i x) + \\
& + (a_{4,i} \text{Cos} n_i ct - a_{3,i} \text{Sinn}_i ct) ct (b_{3,i} \text{Cos} n_i x + b_{4,i} \text{Sinn}_i x) + \\
& + (a_{3,i} \text{Cos} n_i ct + a_{4,i} \text{Sinn}_i ct) x (b_{4,i} \text{Cos} n_i x - b_{3,i} \text{Sinn}_i x)],
\end{aligned} \tag{15}$$

где $a_{1,i} \div a_{4,i}$; $b_{1,i} \div b_{4,i}$; n_i - постоянные интегрирования.

Из выражения (6) и (15) видно, что по мере возрастания x , a , следовательно, и t , наибольшее значение E также возрастает. Эта картина никак не следует из решения (14), которое определяет неизменность наибольшего значения E .

Рассмотрим некоторые свойства функций, составляющих (6) необходимые в дальнейшем для представления отдельных зависимостей в виде ряда, разложенного по этим функциям. Введем обозначение:

$$f_1 = a' \text{Cos} nx + b' \text{Sinn} x + c' x \text{Cos} nx + d' x \text{Sinn} x$$

$$\text{и } \theta_1 = a'_1 \text{Cos} nx + b'_1 \text{Sinn} x;$$

$$a', b', c', d', a'_1, b'_1 - \text{постоянные.}$$

Теорема 1

Фундаментальные функции вида f_1 , удовлетворяющие при $x = x_1$ и $x = x_2$ граничным условиям $\alpha f'_1 + \beta f_1 = 0$, где α и β постоянные, обладают свойством обобщенной ортогональности, т.е.

$$\int_{x_1}^{x_2} f_{1,i} f_{1,j} dx = 0 \text{ при } i \neq j.$$

Действительно, по построению своему функции вида f_1 удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}
f''_{1,i} + n_i^2 f_{1,i} + m_i^2 \theta_{1,i} &= 0 \\
f''_{1,j} + n_j^2 f_{1,j} + m_j^2 \theta_{1,j} &= 0
\end{aligned} \tag{16}$$

Умножим первое уравнение на $\theta_{1,j}$ а второе на $\theta_{1,i}$ и вычтем почленно одно из другого. Интегрируя затем полученное выражение по промежутку (x_1, x_2) , находим

$$\int_{x_1}^{x_2} (f''_{1,i} \theta_{1,j} - \theta_{1,i} f''_{1,j}) dx + n_i^2 \int_{x_1}^{x_2} f_{1,i} \theta_{1,j} dx - n_j^2 \int_{x_1}^{x_2} f_{1,j} \theta_{1,i} dx + (m_i^2 - m_j^2) \int_{x_1}^{x_2} \theta_{1,i} \theta_{1,j} dx = 0.$$

Берём первый и второй интегралы по частям дважды и, подставляя полученные результаты в исходное равенство, имеем:

$$\begin{aligned}
\int_{x_1}^{x_2} \theta_{1,i} f_{1,j} dx + \int_{x_1}^{x_2} f_{1,i} \theta_{1,j} dx &= \frac{1}{n_i^2 - n_j^2} [(f'_{1,i} \theta_{1,j} - f_{1,i} \theta'_{1,j})_{x_1}^{x_2} + (f_{1,j} \theta'_{1,i} - f'_{1,j} \theta_{1,i})_{x_1}^{x_2} + \\
&+ (m_i^2 - m_j^2) \int_{x_1}^{x_2} \theta_{1,i} \theta_{1,j} dx].
\end{aligned} \tag{17}$$

Умножим далее первое уравнение (16) на $f''_{1,j}$, а второе на $f''_{1,i}$, и вычтем почленно одно из другого. Интегрируя полученное выражение, как и ранее, по промежутку (x_1, x_2) находим:

$$n_i^2 \int_{x_1}^{x_2} f_{1,i} f''_{1,j} dx - n_j^2 \int_{x_1}^{x_2} f_{1,j} f''_{1,i} dx + m_i^2 \int_{x_1}^{x_2} \theta_{1,i} f''_{1,j} dx - m_j^2 \int_{x_1}^{x_2} \theta_{1,j} f''_{1,i} dx = 0.$$

Берём третий и четвёртый интегралы по частям дважды. После уже известных преобразований, получаем:

$$m_i^2 n_i^2 \int_{x_1}^{x_2} f_{1,j} \theta_{1,i} dx - m_j^2 n_j^2 \int_{x_1}^{x_2} f_{1,i} \theta_{1,j} dx = n_i^2 \int_{x_1}^{x_2} f_{1,i} f''_{1,j} dx - n_j^2 \int_{x_1}^{x_2} f_{1,j} f''_{1,i} dx + \\ + [m_i^2 (f'_{1,j} \theta_{1,i} - f_{1,j} \theta'_{1,i}) + m_j^2 (f_{1,i} \theta'_{1,j} - f'_{1,i} \theta_{1,j})]_{x_1}^{x_2}$$

Умножим затем первое уравнение (16) на $n_j^2 f_{1,j}$, а второе на $n_i^2 f_{1,i}$. Проведя преобразования аналогичные предыдущим, приходим к следующему выражению:

$$m_i^2 n_j^2 \int_{x_1}^{x_2} \theta_{1,i} f_{1,j} dx - m_j^2 n_i^2 \int_{x_1}^{x_2} \theta_{1,j} f_{1,i} dx = n_i^2 \int_{x_1}^{x_2} f_{1,i} f''_{1,j} dx - n_j^2 \int_{x_1}^{x_2} f_{1,j} f''_{1,i} dx.$$

Исключая из последних двух равенств слагаемое

$$n_i^2 \int_{x_1}^{x_2} f_{1,i} f''_{1,j} dx - n_j^2 \int_{x_1}^{x_2} f_{1,j} f''_{1,i} dx,$$

получаем:

$$m_i^2 \int_{x_1}^{x_2} f_{1,j} \theta_{1,i} dx + m_j^2 \int_{x_1}^{x_2} f_{1,i} \theta_{1,j} dx = \frac{1}{n_i^2 - n_j^2} [m_i^2 (f'_{1,j} \theta_{1,i} - f_{1,j} \theta'_{1,i}) + \\ + m_j^2 (f_{1,i} \theta'_{1,j} - f'_{1,i} \theta_{1,j})]_{x_1}^{x_2}. \quad (18)$$

Наконец, умножим первое уравнение (16) на $f_{1,j}$, а второе на $f_{1,i}$.

Соблюдая выше приведённую последовательность действий, имеем:

$$m_i^2 \int_{x_1}^{x_2} \theta_{1,i} f_{1,j} dx - m_j^2 \int_{x_1}^{x_2} f_{1,i} \theta_{1,j} dx = -(n_i^2 - n_j^2) \int_{x_1}^{x_2} f_{1,i} f_{1,j} dx - \\ - (f'_{1,i} f_{1,j} - f_{1,i} f'_{1,j})_{x_1}^{x_2}. \quad (19)$$

Преобразуем (17) как:

$$m_i^2 \int_{x_1}^{x_2} \theta_{1,i} f_{1,j} dx = -m_i^2 \int_{x_1}^{x_2} \theta_{1,j} f_{1,i} dx - \frac{m_i^2}{n_i^2 - n_j^2} [(f'_{1,i} \theta_{1,j} - f_{1,i} \theta'_{1,j})_{x_1}^{x_2} + \\ + (f_{1,j} \theta'_{1,i} - f'_{1,j} \theta_{1,i})_{x_1}^{x_2} + (m_i^2 - m_j^2) \int_{x_1}^{x_2} \theta_{1,i} \theta_{1,j} dx]$$

и подставим сначала в (18), а затем в (19). Исключая из полученных двух выражений $\int_{x_1}^{x_2} f_{1,i} \theta_{1,j} dx$, после преобразований находим:

$$(n_i^4 - n_j^4) \int_{x_1}^{x_1} f_{1,i} f_{1,j} dx = -2m_i^2 m_j^2 \int_{x_1}^{x_1} \theta_{1,i} \theta_{1,j} dx -$$

$$- \left[(n_i^2 - n_j^2) (f'_{1,i} f_{1,j} - f'_{1,j} f_{1,i}) + m_j^2 (f'_{1,i} \theta_{1,j} - f'_{1,j} \theta_{1,i}) - m_i^2 (f_{1,j} \theta'_{1,i} - f_{1,i} \theta'_{1,j}) \right]_{x_1}^{x_2}. \quad (20)$$

Согласно определению

$$\left. \begin{aligned} \alpha f'_{1,i}(x_1) + \beta f_{1,i}(x_1) &= 0 \\ \alpha f'_{1,j}(x_1) + \beta f_{1,j}(x_1) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (21)$$

Умножая первое уравнение (21) на $f_{1,j}(x_1)$, а второе на $f_{1,i}(x_1)$ и вычитая почленно одно из другого, получаем:

$$\left. \begin{aligned} f'_{1,i}(x_1) f_{1,j}(x_1) - f'_{1,j}(x_1) f_{1,i}(x_1) &= 0 \\ \text{точно также находим} \\ f'_{1,i}(x_2) f_{1,j}(x_2) - f'_{1,j}(x_2) f_{1,i}(x_2) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (22)$$

Пусть функции θ также удовлетворяют граничным условиям, указанным в определении, т.е.

$$\left. \begin{aligned} \alpha \theta'_{1,j}(x_1) + \beta \theta_{1,j}(x_1) &= 0 \\ \alpha \theta'_{1,i}(x_1) + \beta \theta_{1,i}(x_1) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (23)$$

Умножая первое уравнение (21) на $\theta_{1,j}(x_1)$ и первое уравнение (23) на $f_{1,i}(x_1)$ и преобразовывая уже известным образом, имеем:

$$\left. \begin{aligned} f'_{1,i}(x_1) \theta_{1,j}(x_1) - \theta'_{1,j}(x_1) f_{1,i}(x_1) &= 0 \\ \text{и аналогично} \\ f'_{1,i}(x_2) \theta_{1,j}(x_2) - \theta'_{1,j}(x_2) f_{1,i}(x_2) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (24)$$

Произведя подобные действия со вторыми уравнениями (21) и (23), легко определить, что

$$\left. \begin{aligned} f_{1,j}(x_1) \theta'_{1,i}(x_1) - f'_{1,j}(x_1) \theta_{1,i}(x_1) &= 0 \\ f_{1,j}(x_2) \theta'_{1,i}(x_2) - f'_{1,j}(x_2) \theta_{1,i}(x_2) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (25)$$

Сравнивая полученные результаты (22), (24) и (25) с правой частью (20) и вспоминая, что при $i \neq j$, $\int_{x_1}^{x_2} \theta_{1,i} \theta_{1,j} dx = 0$, убеждаемся в справедливости теоремы.

Доказательство соотношения $\int_{x_1}^{x_2} \theta_{1,i} \theta_{1,j} dx = 0$ при $i \neq j$ достаточно известно и поэтому здесь не приводится.

Следствие

$$\text{При } i \neq j \quad \int_{x_1}^{x_2} f_{1,i} \theta_{1,j} dx = \int_{x_1}^{x_2} f_{1,j} \theta_{1,i} dx = 0.$$

Теорема 2

Если n_i одно из фундаментальных чисел рассматриваемой задачи о фундаментальных функциях, а $f_{1,i}$ соответствующая ему нормированная фундаментальная функция, то для любой непрерывно дифференцируемой функции $\psi(x)$ в интервале (x_1, x_2) всегда можно подобрать такое значение m_i , что

$$G(f_{1,i}, \psi) = n_i^2 \int_{x_1}^{x_2} \theta_{1,i} \psi dx = n_i^2 H(\theta_{1,i}, \psi),$$

где $G(f_{1,i}, \psi)$ и $H(\theta_{1,i}, \psi)$ - соответствующие билинейные функционалы. Действительно, интегрируя функционал $G(f_{1,i}, \psi)$ по частям и принимая во внимание первое уравнение (16), получаем:

$$\begin{aligned} G(f_{1,i}, \psi) &= \int_{x_1}^{x_2} (-f'_{1,i} \psi' + n_i^2 f_{1,i} \psi) dx = -f'_{1,i} \psi \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \psi (f''_{1,i} + n_i^2 f_{1,i}) dx = \\ &= -f'_{1,i} \psi \Big|_{x_1}^{x_2} - m_i^2 \int_{x_1}^{x_2} \theta_{1,i} \psi dx. \end{aligned}$$

Поскольку m_i^2 оставалась произвольным, то полагая его равным

$$-\frac{f'_{1,i} \psi \Big|_{x_1}^{x_2}}{H(\theta_{1,i}, \psi)} - n_i^2,$$

получаем тем самым утверждение теоремы. Если $\psi(x)$ на границах интервала обращается в нуль, то на m_i^2 при доказательстве не требуется накладывать указанного выше условия.

Следствие

Если фундаментальные функции $\theta_{1,i}$ и $f_{1,i}$ отнормировать так, чтобы

$$\int_{x_1}^{x_2} \theta_{1,i} f_{1,i} dx = 1,$$

для чего достаточно умножить эти функции соответственно на величину

$\sqrt{\int_{x_1}^{x_2} \theta_{1,i} f_{1,i} dx}$, то $G(f_{1,i}) = n_i^2$. Принимая во внимание следствие теоремы 1,

получаем:

$$G(f_{1,i}, f_{1,j}) = 0 \text{ при } i \neq j.$$

Теорема 3

Фундаментальные числа n_i ограничены снизу.

В самом деле,

$$G(f_{1,i}) = \int_{x_1}^{x_2} (-f_{1,i}'^2 + n_i^2 f_{1,i}^2) dx > - \int_{x_1}^{x_2} f_{1,i}'^2 dx.$$

Т.к. интеграл, стоящий в правой части (если произвести его непосредственное вычисление и учесть, что в $f_1 \quad a' = A_i$ и $C' = C_i$ при A_i и C_i выражающихся как (27), а $A_i n_i$ и $C_i n_i$ как видно из (31), суть величины ограниченные и представляют собой некоторые постоянные), есть величина ограниченная, то функционал $G(f_{1,i})$ ограничен снизу. Учитывая, что при $H(\theta_{1,i}, f_{1,i}) = 1$, $G(f_{1,i}) = n_i^2$ получаем, что фундаментальные числа n_i также ограничены снизу. Разумеется, что результаты всех приведенных выше доказательств справедливы также в случае граничных условий вида

$$f_1'(x_1) = 0 \quad f_1'(x_2) = 0 \text{ или } f_1(x_1) = 0 \quad f_1(x_2) = 0.$$

В последнем легко убедиться, применяя изложенные выше приемы.

Теорема 4

Произвольная достаточно гладкая в интервале (x_1, x_2) функция $F(x)$, удовлетворяющая граничным условиям $F(x_1) = F(x_2) = 0$, может быть представлена в этом интервале равномерно сходящимся рядом вида:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_{1,i} = \sum_{i=1}^{\infty} (A_i \text{Cos} n_i x + B_i \text{Sinn}_i x + C_i x \text{Cos} n_i x + d_i x \text{Sinn}_i x), \quad (26)$$

где n_i всё возрастающая последовательность фундаментальных чисел $n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_i < \dots$, а A_i, B_i, C_i, d_i - постоянные, определяемые выражениями:

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{\int_{x_1}^{x_2} F(x)(\text{Cos} n_i x + k_i \text{Sinn}_i x) dx \int_{x_1}^{x_2} x^2 (\text{Cos} n_i x + L_i \text{Sinn}_i x)^2 dx -}{\int_{x_1}^{x_2} (\text{Cos} n_i x + k_i \text{Sinn}_i x)^2 dx \int_{x_1}^{x_2} x^2 (\text{Cos} n_i x + L_i \text{Sinn}_i x)^2 dx -} \\ &\quad - \frac{\int_{x_1}^{x_2} F(x)x(\text{Cos} n_i x + L_i \text{Sinn}_i x) dx \int_{x_1}^{x_2} x(\text{Cos} n_i x + L_i \text{Sinn}_i x)(\text{Cos} n_i x + k_i \text{Sinn}_i x) dx}{\left[\int_{x_1}^{x_2} x(\text{Cos} n_i x + L_i \text{Sinn}_i x)(\text{Cos} n_i x + k_i \text{Sinn}_i x) dx \right]^2} \\ C_i &= \frac{\int_{x_1}^{x_2} F(x)x(\text{Cos} n_i x + L_i \text{Sinn}_i x) dx \int_{x_1}^{x_2} (\text{Cos} n_i x + k_i \text{Sinn}_i x)^2 dx -}{\int_{x_1}^{x_2} (\text{Cos} n_i x + k_i \text{Sinn}_i x)^2 dx \int_{x_1}^{x_2} x^2 (\text{Cos} n_i x + L_i \text{Sinn}_i x)^2 dx -} \\ &\quad - \frac{\int_{x_1}^{x_2} x(\text{Cos} n_i x + L_i \text{Sinn}_i x)(\text{Cos} n_i x + k_i \text{Sinn}_i x) dx \int_{x_1}^{x_2} F(x)(\text{Cos} n_i x + k_i \text{Sinn}_i x) dx}{\left[\int_{x_1}^{x_2} x(\text{Cos} n_i x + L_i \text{Sinn}_i x)(\text{Cos} n_i x + k_i \text{Sinn}_i x) dx \right]^2} \end{aligned} \quad (27)$$

где $B_i = k_i A_i$, $d_i = L_i C_i$;

$$k_i = \frac{(x_2 - x_1) \cos n_i x_1 \cos n_i x_2 - L_i x_1 \sin n_i x_1 \cos n_i x_2 + L_i x_2 \cos n_i x_1 \sin n_i x_2}{x_2 L_i \sin n_i x_1 \sin n_i x_2 + x_2 \sin n_i x_1 \cos n_i x_2 - x_1 \cos n_i x_1 \sin n_i x_2},$$

а L_i является корнем некоторого алгебраического уравнения четвёртой степени.

В связи с тем, что каждая из функций $f_{1,i}$ содержит четыре произвольных постоянных (а не две, как, например, в случае разложения $F(x)$ в ряд Фурье), то представляется возможным, как правило, вне зависимости от принятого числа членов в разложении (26), точно удовлетворить значениям функции $F(x)$ на границах рассматриваемого интервала (хотя при этом сходимость ряда несколько ухудшится). Указанное обстоятельство не всегда может быть выполнено при разложении $F(x)$ в ряд Фурье.

С целью упрощения доказательства теоремы, в определении приняты нулевые граничные условия. Однако, эта теорема может быть доказана для более общих граничных условий. При этом рассуждения в доказательстве не будут иметь никаких принципиальных отличий от приведенных.

Рассмотрим ряд

$$F^*(x) = \sum_{i=1}^M [A_i (\cos n_i x + k_i \sin n_i x) + C_i x (\cos n_i x + L_i \sin n_i x)], \quad (28)$$

в котором $B_i = k_i A_i$, $d_i = L_i C_i$. Функции, составляющие этот ряд, ограничены и интегрируемы каждая по себе в интервале (x_1, x_2) . Поэтому $F^*(x)$, а, следовательно, и $F(x) - F^*(x)$ (здесь предполагается сначала, что $F(x)$ - непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая сформулированным в определении теоремы граничным условиям) можно рассматривать как функции с интегрируемым квадратом. Составим интеграл

$$\delta_i = \int_{x_1}^{x_2} [F(x) - F^*(x)]^2 dx, \quad (29)$$

характеризующий среднеквадратичную ошибку приближения $F^*(x)$ к $F(x)$ в интервале (x_1, x_2) . Величину δ_i можно рассматривать как функцию от коэффициентов A_i и C_i и наилучшее приближение $F^*(x)$ к $F(x)$ получится тогда, когда эти коэффициенты будут выбираться из условий

$$\frac{\partial \delta_i}{\partial A_i} = \dots = \frac{\partial \delta_i}{\partial C_i} = \dots = 0.$$

Дифференцируем δ_i по A_i

$$\int_{x_1}^{x_2} \left\{ F(x) - \sum_{i=1}^M [A_i (\cos n_i x + k_i \sin n_i x) + C_i x (\cos n_i x + L_i \sin n_i x)] \right\} * \quad (30)$$

$$* (\cos n_i x + k_i \sin n_i x) dx = 0$$

и затем по C_i ,

Принимая во внимание следствие теоремы 1 и решая совместно полученные уравнения относительно A_i и C_i , находим, что их выражения в

точности совпадают с указанными в определении теоремы. Легко видеть, что найденные значения A_i и C_i не только соответствуют минимуму δ_i , но и ограничены при $n_i \rightarrow \infty$. Действительно, в точке минимума должно выполняться неравенство

$$\frac{\partial^2 \delta_i}{\partial A_i^2} \cdot \frac{\partial^2 \delta_i}{\partial C_i^2} - \left(\frac{\partial^2 \delta_i}{\partial A_i \partial C_i} \right)^2 > 0.$$

Произведя соответствующие дифференцирования и подставляя результаты в это неравенство, после простых преобразований получаем:

$$\int_{x_1}^{x_2} (Cosn_i x + k_i Sinn_i x)^2 dx \int_{x_1}^{x_2} x^2 (Cosn_i x + L_i Sinn_i x)^2 dx - \\ - \left[\int_{x_1}^{x_2} x (Cosn_i x + L_i Sinn_i x) (Cosn_i x + k_i Sinn_i x) dx \right]^2 > 0$$

при всех n_i не обращающих левую часть неравенства в нуль. Сравнивая полученное выражение с известным неравенством Буняковского, непосредственно убеждаемся в соответствии выражений A_i и C_i минимуму δ_i , когда k_i и L_i таковы, что неравенство не обращается в тождество. Обозначим в выражениях A_i и C_i наибольшие в интервале (x_1, x_2) значения функций $F(x)$, x^2 , $xF(x)$ и x соответственно как T_1, T_2, T_3 и T_4 . Предварительно полагая k_i и L_i ограниченными и вычисляя интегралы в (27), получаем:

$$|A_i| \leq \left| \frac{T_1 T_2 \frac{1}{n_i} (-Sinn_i x + L_i Cosn_i x)_{x_1}^{x_2} * \frac{1}{2} \{ (1 + L_i^2) x + \right. \\ \left. T_2 \frac{1}{4} \left\{ (1 + k_i^2) x + \frac{1}{n_i} \left[\frac{1}{2} Sin2n_i x (1 - k_i^2) - k_i Cos2n_i x \right] \right\}_{x_1}^{x_2} * \right. \\ \left. + \frac{1}{n_i} \left[\frac{1 + L_i^2}{2} Sin2n_i x - L_i Cos2n_i x \right] \right\}_{x_1}^{x_2} - T_3 T_4 \frac{1}{n_i} (-Sinn_i x + L_i Cosn_i x)_{x_1}^{x_2} * \\ \left. * \left\{ (1 + L_i^2) x + \frac{1}{n_i} \left[\frac{1}{2} Sin2n_i x * (1 - L_i^2) \right] - \frac{1}{4} \langle (1 + k_i L_i) x + \right. \right. \\ \left. * \frac{1}{2} \left\{ (1 + k_i L_i) x + \frac{1}{4 n_i} [(1 - k_i L_i) Sin2n_i x - (k_i + L_i) Cos2n_i x] \right\}_{x_1}^{x_2} \right\} \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{4 n_i} [(1 - k_i L_i) Sin2n_i x - (k_i + L_i) Cos2n_i x] \right\}^2 \right|_{x_1}^{x_2} \right|. \quad (31)$$

Т.к. при $n_i \rightarrow \infty$ правая часть неравенства стремится к нулю, то $\lim_{n_i \rightarrow \infty} A_i = 0$.

Точно так же можно установить, что $\lim_{n_i \rightarrow \infty} C_i = 0$.

Если построить ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |A_i|$, то, отбросив члены второго порядка малости, содержащие множитель $\frac{1}{n_i^2}$, придём, как следует из (31), к рассмотрению ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[\left| \frac{a \operatorname{Sinn}_i x_{1,2}}{n_i} \right| + \left| \frac{b \operatorname{Cosn}_i x_{1,2}}{n_i} \right| \right], \quad (32)$$

где a и b некоторые постоянные, не зависящие от n_i . Принимая для оценки сходимости этого ряда интегральный признак Коши, находим, что несобственный интеграл

$$\int_{\alpha}^{\infty} \left[\left| \frac{a \operatorname{Sinn}_i x_{1,2}}{n_i} \right| + \left| \frac{b \operatorname{Cosn}_i x_{1,2}}{n_i} \right| \right] dn_i$$

есть величина конечная ($\alpha \neq 0$, т.к. $n_i \neq 0$). Поэтому ряд (32), а, следовательно, и ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |A_i|$ являются сходящимися. Отсюда; непосредственно

вытекает, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$ и по аналогии ряд $\sum_{i=1}^{\infty} C_i$ - абсолютно сходящиеся.

Покажем далее, что система функций вида f_1 обладает полнотой и ряд (28) сходится к $F(x)$ "в среднем", т.е. $\lim_{M \rightarrow \infty} \delta_i = 0$, что равносильно $\lim_{n_i \rightarrow \infty} \delta_i = 0$. Введём

обозначения:

$$F_M(x) = F(x) - \sum_{i=1}^M [A_i (\operatorname{Cosn}_i x + k_i \operatorname{Sinn}_i x) + C_i x (\operatorname{Cosn}_i x + L_i \operatorname{Sinn}_i x)]$$

$$P_M(x) = \frac{F_M(x)}{\sqrt{\delta_i}}.$$

Поставим задачу о нахождении минимума функционала

$$G(P_M) = \int_{x_1}^{x_2} [-P_M'^2(x) + n_i^2 P_M^2(x)] dx$$

при дополнительном условии

$$H(P_M) = \int_{x_1}^{x_2} \theta_{1,i} P_M(x) dx = 1.$$

На основании теоремы Эйлера можно утверждать, что функции, дающие решение поставленной задачи, должны быть экстремалиями функционала

$$G(P_M) + 2m_i^2 H(P_M) = \int_{x_1}^{x_2} [-P_M'^2(x) + n_i^2 P_M^2(x) + 2m_i^2 \theta_{1,i} P_M(x)] dx,$$

для которого уравнение Эйлера

$$P_M''(x) + n_i^2 P_M(x) = -m_i^2 \theta_{1,i}$$

в точности совпадает с уравнениями (16). Если коэффициенты A_i и C_i выбраны как (27), то $\int_{x_1}^x P_M(x) f_{1,i} dx = 0$, где $i = 1, 2, 3, \dots, M$. Т.к., кроме того, граничные условия задачи о собственных значениях и рассматриваемой вариационной задачи также совпадают, то функция $P_M(x)$, дающая минимум $G(P_M)$ при условии $H(P_M) = 1$ является фундаментальной. Поэтому, учитывая следствие теоремы 2, а также в силу определения настоящей теоремы в отношении чисел n_i , $G(P_M) \geq n_{M+1}^2$. Вычислим $G(P_M)$. Переходим к ранее принятым обозначениям:

$$\begin{aligned} G(P_M) &= \int_{x_1}^{x_1} [-P_M'^2(x) + n_i^2 P_M^2(x)] dx = \frac{1}{\delta_i} \int_{x_1}^{x_1} [-(F'(x) - \sum_{i=1}^M f_{1,i}')^2 + \\ &+ n_i^2 (F(x) - \sum_{i=1}^M f_{1,i})^2] dx = \frac{1}{\delta_i} \left\{ G[F(x)] - 2 \sum_{i=1}^M G[F(x), f_{1,i}] + \right. \\ &\left. + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M G(f_{1,i}, f_{1,j}) \right\} \geq n_{M+1}^2. \end{aligned} \quad (33)$$

На основании теоремы 2 имеем:

$$G[F(x), f_{1,i}] = n_i^2 \int_{x_1}^{x_2} F(x) \theta_{1,i} dx; \quad G(f_{1,i}, f_{1,j}) = 0 \quad \text{при } i \neq j.$$

Подставляя эти значения функционалов (33), получаем:

$$\frac{1}{\delta_i} \left\{ G[F(x)] - \sum_{i=1}^M n_i^2 \int_{x_1}^{x_2} [\theta_{1,i} F(x) + \theta_{1,i} (F(x) - f_{1,i})] dx \right\} \geq n_{M+1}^2. \quad (34)$$

Принимая во внимание теорему 1, из первого уравнения (30) после умножения его на A_i имеем:

$$\int_{x_1}^{x_2} \theta_{1,i} [F(x) - f_{1,i}] dx = 0, \text{ откуда } \int_{x_1}^{x_2} F(x) \theta_{1,i} dx = \int_{x_1}^{x_2} \theta_{1,i} f_{1,i} dx.$$

Подставляя найденные значения интегралов в (34), находим:

$$\delta_i \leq \frac{G[F(x)] - \sum_{i=1}^M n_i^2 \int_{x_1}^{x_2} \theta_{1,i} f_{1,i} dx}{n_{M+1}^2} = \frac{G[F(x)] - \sum_{i=1}^M G(f_{1,i})}{n_{M+1}^2}. \quad (35)$$

Учитывая теорему 3, а также то, что при достаточно большом i можно подобрать также достаточно большое n_i , допустимо положить, что с некоторого i $G[F(x)] > 0$ и $G(f_{1,i}) > 0$.

Принимая во внимание, что при любом сколь угодно большом наперед заданном значении n_i , не зависящем от "M", $G[F(x)]$ остаётся конечным, можно считать числитель правой части (35) ограниченным, ибо в противном случае $\delta_i < 0$, что невозможно по построению δ_i . Т.к. при $M \rightarrow \infty$, $n_i \rightarrow \infty$, то

отсюда следует, что $\delta_i \rightarrow 0$ при $M \rightarrow \infty$. Таким образом, ряд (28) сходится в среднем к $F(x)$. Умножая обе части ряда (26) отдельно на $A_i \cos n_i x + B_i \sin n_i x$, а затем на $x(C_i \cos n_i x + d_i \sin n_i x)$ и интегрируя (по доказанному система рассматриваемых функций обладает полнотой) их по промежутку (x_1, x_2) , после преобразований с учётом теоремы 1 и её следствия получаем:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} F(x)(\cos n_i x + k_i \sin n_i x) dx &= A_i \int_{x_1}^{x_2} (\cos n_i x + k_i \sin n_i x)^2 dx + \\ &+ C_i \int_{x_1}^{x_2} x(\cos n_i x + L_i \sin n_i x)(\cos n_i x + k_i \sin n_i x) dx; \\ \int_{x_1}^{x_2} F(x)x(\cos n_i x + L_i \sin n_i x) dx &= A_i \int_{x_1}^{x_2} x(\cos n_i x + L_i \sin n_i x) * \\ &* (\cos n_i x + k_i \sin n_i x) dx + C_i \int_{x_1}^{x_2} x^2 (\cos n_i x + L_i \sin n_i x)^2 dx. \end{aligned}$$

Решая эти уравнения совместно относительно A_i и C_i , находим их значения, которые в точности совпадают с (27). Полученный результат говорит о том, что если в рассматриваемом ряде отбросить бесконечное число членов, следующих за n -м, то оставшаяся конечная сумма даст приближение $F(x)$ наилучшее из возможных с помощью рассмотренных рядов с тем же числом членов. Более того, коэффициенты (27), найденные для $i = M$, остаются неизменными при увеличении числа членов ряда (26). Чтобы освободиться от ранее принятого ограничения непрерывной дифференцируемости функции $F(x)$, достаточно вспомнить, что для всякой достаточно гладкой функции $F(x)$ существует непрерывно дифференцируемая функция $f(x)$, удовлетворяющая нулевым граничным условиям и такая, что

$$\int_{x_1}^{x_2} [F(x) - f(x)]^2 dx < \varepsilon,$$

где ε - любое заданное положительное число.

Покажем далее, что ряд (26) сходится к $F(x)$ равномерно. При этом достаточно показать, что ряд (26) вообще равномерно сходится. Действительно, т.к. этот ряд сходится “в среднем” к $F(x)$, то, сходясь равномерно, он не может иметь своим пределом никакую другую функцию.

Как было показано ранее, ряды $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$ и $\sum_{i=1}^{\infty} C_i$, а, следовательно, в ряд $\sum_{i=1}^{\infty} (A_i + C_i)$ являются абсолютно сходящимися.

Согласно ранее сделанному предположению, k_i и L_i - величины суть ограниченные, поэтому $(\cos n_i x + k_i \sin n_i x)$ и $(\cos n_i x + L_i \sin n_i x)x$ в интервале

(x_1, x_2) также ограничены. Обозначим их максимальные значения в этом интервале соответственно через M_1 и M_2 составим новый ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} (A_i M_1 + C_i M_2). \quad (36)$$

Ряд (36) по признаку Абеля является сходящимся. Сравнивая члены ряда (26) с соответствующими членами мажорантного ряда (36); имеем:

$$|A_i M_1| \geq |A_i (\text{Cos} n_i x + k_i \text{Sinn}_i x)|;$$

$$|C_i M_2| \geq |C_i x (\text{Cos} n_i x + L_i \text{Sinn}_i x)| -$$

таким образом, в соответствии с теоремой Вейерштрасса ряд (26) сходится в рассматриваемом интервале абсолютно и равномерно. Осталось показать, что коэффициенты k_i и L_i действительно ограничены. Для их определения воспользуемся граничными условиями нашей задачи. Подставляя в них (26) для каждого значка i будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} A_i (\text{Cos} n_i x_1 + k_i \text{Sinn}_i x_1) + C_i x_1 (\text{Cos} n_i x_1 + L_i \text{Sinn}_i x_1) &= 0 \\ A_i (\text{Cos} n_i x_2 + k_i \text{Sinn}_i x_2) + C_i x_2 (\text{Cos} n_i x_2 + L_i \text{Sinn}_i x_2) &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Для того, чтобы эта система имела решение отличное от нулевого, необходимо и достаточно, чтобы её определитель равнялся нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} \text{Cos} n_i x_1 + k_i \text{Sinn}_i x_1 & x_1 (\text{Cos} n_i x_1 + L_i \text{Sinn}_i x_1) \\ \text{Cos} n_i x_2 + k_i \text{Sinn}_i x_2 & x_2 (\text{Cos} n_i x_2 + L_i \text{Sinn}_i x_2) \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, после преобразований получаем:

$$k_i = - \frac{(x_2 - x_1) \text{Cos} n_i x_1 \text{Cos} n_i x_2 - L_i x_1 \text{Sinn}_i x_1 \text{Cos} n_i x_2 + L_i x_2 \text{Cos} n_i x_1 \text{Sinn}_i x_2}{x_2 L_i \text{Sinn}_i x_1 \text{Sinn}_i x_2 + x_2 \text{Sinn}_i x_1 \text{Cos} n_i x_2 - x_1 \text{Cos} n_i x_1 \text{Sinn}_i x_2}.$$

С другой стороны, подставляя значения A_i , C_i и k_i из последнего выражения, например, в первое уравнение системы, приходим к алгебраическому уравнению четвертой степени относительно L_i , из которого этот коэффициент и определяется. Т.к. все коэффициенты названного уравнения четвертой степени относительно L_i (последнее не приводится из-за громоздкости) имеют конечную величину при всех n_i , а знаменатель выражения для k_i не обращается в нуль ни при каком значении n_i , то при неограниченном возрастании n_i коэффициенты k_i и L_i должны оставаться ограниченными. Оставшиеся неизвестными коэффициенты ряда (26) определяются как $B_i = k_i A_i$; $d_i = L_i C_i$. Следует отметить, что коэффициенты B_i и d_i могут быть определены также как A_i и C_i непосредственно из условий

$$\frac{\partial \delta_i}{\partial B_i} = \dots = \frac{\partial \delta_i}{\partial d_i} = \dots = 0.$$

Всё вышеизложенное справедливо также для функций

$$f_2 = a'' \text{Cos} nct + b'' \text{Sinn} nct + c'' ct \text{Cos} nct + d'' ct \text{Sinn} nct$$

$$\theta_2 = a_1'' \text{Cos} nct + b_1'' \text{Sinn} nct,$$

где a'' , b'' , c'' , d'' , a_1'' , b_1'' - постоянные.

Пользуясь вышеизложенными приёмами можно доказать аналогичные теоремы и для нелинейных составляющих решения вида (13).

3. Решение краевой задачи

Поместим начало координат в точку, где расположен источник электромагнитного излучения. Решение уравнения (1) с помощью описанного метода можно представить в виде:

$$E = E_0 \sin \nu_0 ct \cos \nu_0 x + \sum_i [(a_{1,n_i} \cos n_i ct + a_{2,n_i} \sin n_i ct)(b_{1,n_i} \cos n_i x + b_{2,n_i} \sin n_i x) + (a_{4,n_i} \cos n_i ct - a_{3,n_i} \sin n_i ct)ct(b_{3,n_i} \cos n_i x + b_{4,n_i} \sin n_i x) + (a_{3,n_i} \cos n_i ct + a_{4,n_i} \sin n_i ct)x(b_{4,n_i} \cos n_i x - b_{3,n_i} \sin n_i x)], \quad (37)$$

где $a_{1,n_i} \div a_{4,n_i}$, $b_{1,n_i} \div b_{4,n_i}$, n_i - постоянные интегрирования, которые подбираются так, чтобы решение удовлетворяло условиям:

а) $t = 0; E = 0$

б) $x = 0; E = E_0 \sin \nu_0 ct$

в) *Значение энергии, переносимое электромагнитными волнами за 1 сек. через условное сечение, постоянно в любой точке пространства.* (38)

$$\mathcal{E}_{x=0} = \mathcal{E}_{x=x_0} \text{ или } 2|E_0 \overline{P}|_{x=0} = 2|E|_{t \geq \frac{x_0}{c}}^{x=x_0} |\overline{P}|_{x=x_0},$$

где $|E|_{t \geq \frac{x_0}{c}}^{x=x_0}$ - амплитуда в точке пространства, где помещен наблюдатель.

$|\overline{P}|_{x=0}$ и $|\overline{P}|_{x=x_0}$ - векторы Умова-Пойтинга, соответственно в точках $x = 0$ и $x = x_0$

Подставляя решение (37) в условия (38а) получаем:

$$\sum_i [a_{1,n_i} (b_{1,n_i} \cos n_i x + b_{2,n_i} \sin n_i x) + a_{3,n_i} (b_{4,n_i} \cos n_i x - b_{3,n_i} \sin n_i x)x] = 0,$$

откуда $a_{1,n_i} = a_{3,n_i} = 0$.

Далее из условия (38б) находим:

$$E_0 \sin \nu_0 ct + \sum_i [a_{2,n_i} b_{1,n_i} \sin n_i ct + a_{4,n_i} b_{3,n_i} ct \cos n_i ct] = E_0 \sin \nu_0 ct$$

и, следовательно, $b_{1,n_i} = b_{3,n_i} = 0$.

Таким образом, решение (37) удовлетворяющее условиям (38а) и (38б) принимает вид:

$$E = E_0 \sin \nu_0 ct \cos \nu_0 x + \sum_i [(a_{2,n_i} b_{2,n_i} \sin n_i x + a_{4,n_i} b_{4,n_i} x \cos n_i x) \sin n_i ct + a_{4,n_i} b_{4,n_i} \sin n_i x ct \cos n_i ct] \quad (39)$$

Подставим это решение в (38в). Введём обозначение:

$$-E_0 \left(\sqrt{\frac{E_0}{E_{\max}} + \cos \nu_0 x_0} \right) = B;$$

$$a_{2,n_i} b_{2,n_i} \text{Sinn}_i x_0 + a_{4,n_i} b_{4,n_i} x_0 \text{Cosn}_i x_0 = C_{n_i}^*;$$

$$a_{4,n_i} b_{4,n_i} \text{Sinn}_i x_0 = A_{n_i}^*,$$

где $E_{\max}$ - максимальное значение амплитуды в точке $x = x_0$, равное $\left| E \right|_{\substack{x=x_0 \\ t \geq \frac{x_0}{c}}}$. После простых преобразований имеем:

$$B \sin \nu_0 ct = \sum_i (A_{n_i}^* ct \text{Cosn}_i ct + C_{n_i}^* \text{Sinn}_i ct).$$

Это равенство должно выполняться в интервале времени

$$0 \leq t \leq \left| \frac{\pi}{\nu_0 c} \right|.$$

Таким образом, должно быть справедливым соотношение

$$A_{n_i}^* \frac{\pi}{\nu_0} \text{Cosn}_i \frac{\pi}{\nu_0} + C_{n_i}^* \text{Sinn}_i \frac{\pi}{\nu_0} = 0,$$

где коэффициенты $A_{n_i}^*$ и $C_{n_i}^*$ согласно теореме 4 определяются соотношениями:

$$A_n^* = B \frac{\int_0^{\frac{\pi}{\nu_0 c}} \sin \nu_0 ct \cdot ct \text{Cosn}_i ct dt \int_0^{\frac{\pi}{\nu_0 c}} \sin^2 n_i ct dt - \int_0^{\frac{\pi}{\nu_0 c}} \sin \nu_0 ct \text{Sinn}_i ct dt \int_0^{\frac{\pi}{\nu_0 c}} \text{Sinn}_i ct \cdot ct \text{Cosn}_i ct dt}{\int_0^{\frac{\pi}{\nu_0 c}} \sin^2 n_i ct dt \int_0^{\frac{\pi}{\nu_0 c}} c^2 t^2 \text{Cos}^2 n_i ct dt - \left(\int_0^{\frac{\pi}{\nu_0 c}} \text{Sinn}_i ct \cdot ct \text{Cosn}_i ct dt \right)^2},$$

$$C_{n_i}^* = B \frac{\int_0^{\frac{\pi}{\nu_0 c}} \sin \nu_0 ct \cdot ct \text{Sinn}_i ct dt \int_0^{\frac{\pi}{\nu_0 c}} c^2 t^2 \text{Cos}^2 n_i ct dt - \int_0^{\frac{\pi}{\nu_0 c}} \sin \nu_0 ct \cdot ct \text{Cosn}_i ct dt \int_0^{\frac{\pi}{\nu_0 c}} \text{Sinn}_i ct \cdot ct \text{Cosn}_i ct dt}{\int_0^{\frac{\pi}{\nu_0 c}} \sin^2 n_i ct dt \int_0^{\frac{\pi}{\nu_0 c}} c^2 t^2 \text{Cos}^2 n_i ct dt - \left(\int_0^{\frac{\pi}{\nu_0 c}} \text{Sinn}_i ct \cdot ct \text{Cosn}_i ct dt \right)^2}.$$

После интегрирования получаем выражение, из которого определяются все n_i

$$\begin{aligned}
& \frac{\pi}{\nu_0} \text{Cos} n_i \frac{\pi}{\nu_0} \left\{ \left[\frac{\text{Sin} \pi \left(1 + \frac{n_i}{\nu_0} \right)}{\left(1 + \frac{n_i}{\nu_0} \right)^2} - \frac{\pi \text{Cos} \pi \left(1 + \frac{n_i}{\nu_0} \right)}{1 + \frac{n_i}{\nu_0}} + \frac{\text{Sin} \pi \left(1 - \frac{n_i}{\nu_0} \right)}{\left(1 - \frac{n_i}{\nu_0} \right)^2} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\pi \text{Cos} \pi \left(1 - \frac{n_i}{\nu_0} \right)}{1 - \frac{n_i}{\nu_0}} \right] \frac{1}{\nu_0} \left(\frac{\pi}{\nu_0} - \frac{1}{2n_i} \text{Sin} \frac{2\pi n_i}{\nu_0} \right) - \left[\frac{\text{Sin} \pi \left(1 - \frac{n_i}{\nu_0} \right)}{1 - \frac{n_i}{\nu_0}} - \frac{\text{Sin} \pi \left(1 + \frac{n_i}{\nu_0} \right)}{1 + \frac{n_i}{\nu_0}} \right] * \right. \\
& \left. * \frac{1}{2n_i} \left(\frac{\text{Sin} \frac{2\pi n_i}{\nu_0}}{2n_i} - \frac{\pi}{\nu_0} \text{Cos} \frac{2\pi n_i}{\nu_0} \right) \right\} = \\
& = \text{Sin} \frac{n_i \pi}{\nu_0} \left\{ \left[\frac{\text{Sin} \pi \left(1 - \frac{n_i}{\nu_0} \right)}{1 - \frac{n_i}{\nu_0}} - \frac{\text{Sin} \pi \left(1 + \frac{n_i}{\nu_0} \right)}{1 + \frac{n_i}{\nu_0}} \right] \left[\frac{\pi^3}{3\nu_0^3} + \frac{\pi}{2n_i^2 \nu_0} \text{Cos} \frac{2n_i \pi}{\nu_0} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{\pi^2}{2n_i \nu_0^2} - \frac{1}{4n_i^3} \right) \text{Sin} \frac{2n_i \pi}{\nu_0} \right] - \left[\frac{\text{Sin} \pi \left(1 + \frac{n_i}{\nu_0} \right)}{\left(1 + \frac{n_i}{\nu_0} \right)^2} - \frac{\pi \text{Cos} \pi \left(1 + \frac{n_i}{\nu_0} \right)}{1 + \frac{n_i}{\nu_0}} + \frac{\text{Sin} \pi \left(1 - \frac{n_i}{\nu_0} \right)}{\left(1 - \frac{n_i}{\nu_0} \right)^2} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\pi \text{Cos} \pi \left(1 - \frac{n_i}{\nu_0} \right)}{1 - \frac{n_i}{\nu_0}} \right] \frac{1}{2\nu_0 n_i} \left(\frac{\text{Sin} \frac{2n_i \pi}{\nu_0}}{2n_i} - \frac{\pi}{\nu_0} \text{Cos} \frac{2n_i \pi}{\nu_0} \right) \right\} \quad (40)
\end{aligned}$$

Окончательное решение уравнения (1) удовлетворяющее условиям (38) будет:

$$\begin{aligned}
E = E_0 \text{Sin} \nu_0 c t \text{Cos} \nu_0 x + \sum_i \left\{ \left[\left(\frac{C_{n_i}^*}{\text{Sinn}_i x_0} - x_0 c t \text{gn}_i x_0 \frac{A_{n_i}^*}{\text{Sinn}_i x_0} \right) \text{Sinn}_i x + \right. \right. \\
\left. \left. + \frac{A_{n_i}^*}{\text{Sinn}_i x_0} x \text{Cos} n_i x \right] \text{Sinn}_i c t + \frac{A_{n_i}^*}{\text{Sinn}_i x_0} \text{Sinn}_i x \cdot c t \text{Cos} n_i c t \right\}.
\end{aligned}$$

При $x = x_0 = \frac{\pi}{\nu_0}$ и $t = \frac{\pi}{\nu_0 c} + \frac{\pi}{2\nu_0 c}$, $E = E_{\max}$

$$E_{\max} = E_0 + \sum_i \left(A_{n_i}^* \frac{3\pi}{2\nu_0} \text{Cos} \frac{3\pi n_i}{2\nu_0} + C_{n_i}^* \text{Sin} \frac{3\pi n_i}{2\nu_0} \right),$$

откуда, после простых преобразований

$$\sqrt{\frac{E_{\max}}{E_0}} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \sum_i \left(A_{n_i} \frac{3\pi}{2\nu_0} \cos \frac{3\pi n_i}{2\nu_0} + C_{n_i} \sin \frac{3\pi n_i}{2\nu_0} \right)},$$

где $A_{n_i}^* = BA_{n_i}$; $C_{n_i}^* = BC_{n_i}$.

Если принять во внимание, что

$$\nu_0^4 E_0^2 \cong \nu^4 E_{\max}^2, \text{ то}$$

$$\frac{\nu_0}{\nu} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \sum_i \left(A_{n_i} \frac{3\pi}{2\nu_0} \cos \frac{3\pi n_i}{2\nu_0} + C_{n_i} \sin \frac{3\pi n_i}{2\nu_0} \right)}, \quad (41)$$

Где

$$\begin{aligned} A_{n_i} = & \frac{\frac{1}{4\nu_0^2} \left[\frac{\sin \pi \left(1 + \frac{n_i}{\nu_0} \right)}{\left(1 + \frac{n_i}{\nu_0} \right)^2} - \frac{\pi \cos \pi \left(1 + \frac{n_i}{\nu_0} \right)}{\left(1 + \frac{n_i}{\nu_0} \right)} + \frac{\sin \pi \left(1 - \frac{n_i}{\nu_0} \right)}{\left(1 - \frac{n_i}{\nu_0} \right)^2} - \frac{\pi \cos \pi \left(1 - \frac{n_i}{\nu_0} \right)}{\left(1 - \frac{n_i}{\nu_0} \right)} \right] *}{\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\nu_0} - \frac{1}{2n_i} \sin \frac{2n_i \pi}{\nu_0} \right) * \frac{1}{2} \left[\frac{\pi^3}{3\nu_0^3} + \frac{\pi}{2n_i^2 \nu_0} \cos \frac{2n_i \pi}{\nu_0} + \left(\frac{\pi^2}{2n_i \nu_0^2} - \frac{1}{4n_i^3} \right) \sin \frac{2n_i \pi}{\nu_0} \right] -} \\ & * \left(\frac{\pi}{\nu_0} - \frac{1}{2n_i} \sin \frac{2n_i \pi}{\nu_0} \right) - \frac{\left[\frac{\sin \pi \left(1 - \frac{n_i}{\nu_0} \right)}{\left(1 - \frac{n_i}{\nu_0} \right)} - \frac{\sin \pi \left(1 + \frac{n_i}{\nu_0} \right)}{\left(1 + \frac{n_i}{\nu_0} \right)} \right]}{8n_i \nu_0 \left(\frac{1}{2n_i} \sin \frac{2n_i \pi}{\nu_0} - \frac{\pi}{\nu_0} \cos \frac{2n_i \pi}{\nu_0} \right)} \\ & - \left[\frac{1}{4n_i} \left(\frac{1}{2n_i} \sin \frac{2n_i \pi}{\nu_0} - \frac{\pi}{\nu_0} \cos \frac{2n_i \pi}{\nu_0} \right) \right]^2; \\ C_{n_i} = & \frac{\left[\frac{\sin \pi \left(1 - \frac{n_i}{\nu_0} \right)}{\left(1 - \frac{n_i}{\nu_0} \right)} - \frac{\sin \pi \left(1 + \frac{n_i}{\nu_0} \right)}{\left(1 + \frac{n_i}{\nu_0} \right)} \right] * \frac{1}{4\nu_0} \left[\frac{\pi^3}{3\nu_0^3} + \frac{\pi}{2n_i^2 \nu_0} \cos \frac{2n_i \pi}{\nu_0} + \right.}{\left(\frac{\pi}{2\nu_0} - \frac{1}{4n_i} \sin \frac{2n_i \pi}{\nu_0} \right) * \frac{1}{2} \left[\frac{\pi^3}{3\nu_0^3} + \frac{\pi}{2n_i^2 \nu_0} \cos \frac{2n_i \pi}{\nu_0} + \right.} \\ & \left. \left. + \left(\frac{\pi^2}{2n_i \nu_0^2} - \frac{1}{4n_i^3} \right) \sin \frac{2n_i \pi}{\nu_0} \right] - \left[\frac{\sin \pi \left(1 + \frac{n_i}{\nu_0} \right)}{\left(1 + \frac{n_i}{\nu_0} \right)^2} - \frac{\pi \cos \pi \left(1 + \frac{n_i}{\nu_0} \right)}{\left(1 + \frac{n_i}{\nu_0} \right)} + \frac{\sin \pi \left(1 - \frac{n_i}{\nu_0} \right)}{\left(1 - \frac{n_i}{\nu_0} \right)^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{\pi^2}{4n_i \nu_0^2} - \frac{1}{4n_i^3} \right) \sin \frac{2n_i \pi}{\nu_0} \right] - \right. \\ & \left. - \frac{\pi \cos \pi \left(1 - \frac{n_i}{\nu_0} \right)}{\left(1 - \frac{n_i}{\nu_0} \right)} \right] * \frac{1}{8n_i \nu_0^2} \left(\frac{1}{2n_i} \sin \frac{2n_i \pi}{\nu_0} - \frac{\pi}{\nu_0} \cos \frac{2n_i \pi}{\nu_0} \right)}{\left[\frac{1}{4n_i} \left(\frac{1}{2n_i} \sin \frac{2n_i \pi}{\nu_0} - \frac{\pi}{\nu_0} \cos \frac{2n_i \pi}{\nu_0} \right) \right]^2} \end{aligned} \quad (42)$$

Производя затем последовательные вычисления по формулам (40), (42) и (41), беря каждый раз за исходное ν_0 , полученное его значение из предыдущего расчёта, можно получить отношение $\frac{\nu_0}{\nu}$ для любого расстояния $s = x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n$ от источника до наблюдателя, где

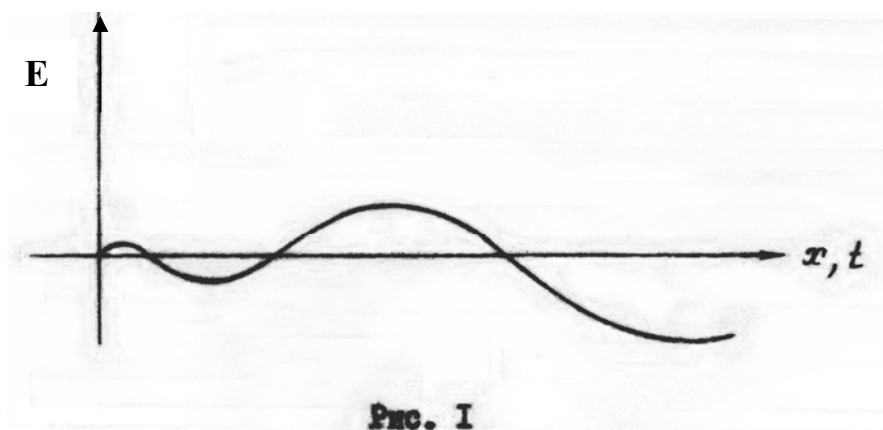
$$x_1 = \frac{\pi}{\nu_1} \quad x_2 = \frac{\pi}{\nu_2} \dots$$

В принципе, для последующего числового расчёта можно взять любую другую точку внутри интервала $0 < x < x_0$, для которой $E = E_{\max}$ при $t \leq \frac{\pi}{\nu_0 c}$.

Качественный результат от этого не изменится.

Большое значение $\frac{\nu_0}{\nu}$ получено ввиду принятого весьма малого значения ν_0 .

Картина распространения электромагнитной волны графически может быть изображена как показано на рис. 1.



Описанное явление распространения электромагнитных волн в вакууме может быть использовано в астрономических наблюдениях для определения расстояний до объектов звездного мира.

Таким образом, электромагнитные волны, генерируемые неподвижным относительно наблюдателя источником, распространяясь в пространстве свободном от гравитационного поля способного вызвать изменение их частоты в соответствии с выводами общей теории относительности претерпевают с удалением от источника генерации изменения, выражающиеся в уменьшении частоты колебаний волн при соответствующем увеличении амплитуды, причем эти изменения зависят от начальной частоты генерируемой источником.

4. Числовой расчёт

В целях возможности расчета с помощью ручных вычислительных средств примем за исходную величину

$$\nu_0 = 1 \frac{1}{сек}.$$

В формуле (40) перенесем правую часть в левую и обозначим полученное выражение через y . Расчет и значения полученных положительных корней " n_i " сведены в табл. 1.

Таблица 1

1	n_i	1	0,499	1,595	2,275
2	ν_0	1	1	1	1
3	$\frac{n_i}{\nu_0}$	1	0,499	1,595	2,275
4	$1 + \frac{n_i}{\nu_0}$	2	1,499	2,595	3,275
5	$1 - \frac{n_i}{\nu_0}$	0	0,501	-0,595	-1,275
6	$(1 + \frac{n_i}{\nu_0})^2$	4	2,243	6,73	10,72
7	$(1 - \frac{n_i}{\nu_0})^2$	0	0,251	0,354	1,625
8	$\pi(1 - \frac{n_i}{\nu_0})$	0	90°11 '	-107°6'	-229°30'
9	$\pi(1 + \frac{n_i}{\nu_0})$	2 π	269°49'	107°6'	229°30'
10	$Sin\pi(1 + \frac{n_i}{\nu_0})$	0	-1	0,9558	-0,7604
11	$Cos\pi(1 + \frac{n_i}{\nu_0})$	1	-0,0032	- 0,2941	-0,6494
12	$Sin\pi(1 - \frac{n_i}{\nu_0})$	0	1	- 0,9558	0,7604
13	$Cos\pi\left(1 - \frac{n_i}{\nu_0}\right)$	1	- 0,0032	- 0,2941	- 06494
14	$\pi Cos\pi\left(1 + \frac{n_i}{\nu_0}\right)$	π	- 0,01007	- 0,924	- 2,04
15	$\pi Cos\pi\left(1 - \frac{n_i}{\nu_0}\right)$	π	- 0,01007	- 0,924	- 2,04
16	$\frac{Sin\pi\left(1 - \frac{n_i}{\nu_0}\right)}{\left(1 - \frac{n_i}{\nu_0}\right)^2}$	—	3,98	-2,7	0,468

17	$\frac{\sin \pi \left(1 + \frac{n_i}{\nu_0}\right)}{\left(1 + \frac{n_i}{\nu_0}\right)^2}$	0	- 0,445	0,142	- 0,071
18	$\frac{\pi \cos \pi \left(1 - \frac{n_i}{\nu_0}\right)}{1 - \frac{n_i}{\nu_0}}$	-	- 0,01655	1,5525	1,6
19	$\frac{\pi \cos \pi \left(1 + \frac{n_i}{\nu_0}\right)}{1 + \frac{n_i}{\nu_0}}$	$\frac{\pi}{2}$	-0,00671	-0,356	-0,623
20	$\frac{\pi}{\nu_0}$	π	π	π	π
21	ν_0	1	1	1	1
22	$n_i \frac{\pi}{\nu_0}$	π	89°49'	287°6'	49°30'
23	$\sin n_i \frac{\pi}{\nu_0}$	0	1	-0,9558	0,7604
24	$\cos n_i \frac{\pi}{\nu_0}$	-1	0,0032	0,2941	0,6494
25	$2n_i \frac{\pi}{\nu_0}$	2π	179°38'	214°12'	99°
26	$\sin 2n_i \frac{\pi}{\nu_0}$	0	0,0113	- 0,5621	0,9877
27	$\cos 2n_i \frac{\pi}{\nu_0}$	1	-1	-0,8971	-0,1564
28	$\frac{1}{2n_i} \sin \frac{2n_i \pi}{\nu_0}$	π	0,01131	-0,1763	0,217
29	$\frac{\pi}{\nu_0} \cos \frac{2n_i \pi}{\nu_0}$	π	-3,141	-2,597	-0,491
30	$\frac{\pi}{\nu_0} - \frac{1}{2n_i} \sin \frac{2n_i \pi}{\nu_0}$	0	3,13	3,317	2,924
31	$\frac{1}{2n_i} \sin \frac{2n_i \pi}{\nu_0} - \frac{\pi}{\nu_0} \cos \frac{2n_i \pi}{\nu_0}$	0	3,152	2,421	0,708
32	(17)-(19)+(16)-(18)	-	3,555	-3,755	- 0,58
33	(32)*(30)	$-\frac{\pi^2}{2}$	11,19	-12,42	- 1,695

34	$\frac{(33)}{(21)}$	-	11,19	-12,42	- 1,695
35	$\frac{\sin \pi(1 - \frac{n_i}{\nu_0})}{1 - \frac{n_i}{\nu_0}}$	-	1,995	1,606	- 0,597
36	$\frac{\sin \pi(1 + \frac{n_i}{\nu_0})}{1 + \frac{n_i}{\nu_0}}$	-	-0,6675	0,3685	- 0,232-
37	(35)-(36)	π	2,6625	1,237	-0,365
38	$(37) * (31) \cdot \frac{1}{2n_i}$	$-\frac{\pi^2}{2}$	8,4	0,935	-0,0559
39	(34)-(38)	0	2,79	-13,355	-1,639
40	(39)*(24)*(20)	0	0,02807	-12,35	-3,455
41	$\frac{\pi^3}{3\nu_0^3}$	$\frac{\pi^3}{3}$	10,35	10,35	10,35
42	n_i^2	1	0,249	2,542	5,088
43	$\frac{\pi}{\nu_0} \cdot \frac{1}{2n_i^2}$	$\frac{\pi}{2}$	6,305	0,618	0,3088
44	$\frac{\pi}{\nu_0} * \frac{1}{2n_i^2} \cos \frac{2n_i\pi}{\nu_0}$	$\frac{\pi}{2}$	-6,305	-0,517	-0,04825
45	$\frac{\pi^2}{\nu_0^2}$	π^2	9,87	9,87	9,87
46	$\frac{\pi^2}{\nu_0^2} \cdot \frac{1}{2n_i}$	$\frac{\pi^2}{2}$	9,89	3,095	2,17
47	n_i^3	1	0,1242	4,055	11,76
48	$\frac{1}{4n_i^3}$	$\frac{1}{4}$	2,005	0,0616	0,02125
49	$\frac{\pi^2}{\nu_0^2} \frac{1}{2n_i} - \frac{1}{4n_i^3}$	$\frac{\pi^2}{2} - \frac{1}{4}$	7,885	3,033	2,149
50	$\left(\frac{\pi^2}{\nu_0^2} \frac{1}{2n_i} - \frac{1}{4n_i^3} \right) \sin \frac{2n_i\pi}{\nu_0}$	0	0,089	-1,705	2,12
51	(41)+(44)+(50)	$\frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi}{2}$	4,134	8,13	12,42
52	(37)*(51)	$\frac{\pi^4}{3} + \frac{\pi^2}{2}$	11,0	10,05	-4,53
53	$\frac{1}{2n_i} \cdot \frac{1}{\nu_0}$	$\frac{1}{2}$	1,001	0,314	0,22

54	$(32)*(53)*(31)$	$\frac{\pi^2}{4}$	11,22	-2,843	-0,0903
55	$(52)-(54)$	$\frac{\pi^4}{3} + \frac{\pi^2}{4}$	-0,2	12,89	-4,44
56	$(55)*(23)$	0	-0,2	-12,315	-3,376
57	$y=(40)-(56)$	0	0,228	-0,035	-0,079

$$|-n_i| = n_i.$$

Вычисление последующих значений n_i является нецелесообразным, т. к. полученные их значения обеспечивают требуемую точность дальнейших расчетов. Вычислим отношение $\frac{\nu}{\nu_0}$. Расчет по формуле (41) сведен в табл. 2.

Таблица 2

I	n_i	- I	+ I	- 0,499	+ 0,499	- I,595	+ I,595	- 2,275	+ 2,275
2	$\frac{1}{4} \frac{(33) - (38)}{V_0} \frac{1}{4} \frac{1}{V_0}$	-	-	0,698	0,698	- 3,34	- 3,34	- 0,4095	- 0,4095
3	$\frac{1}{4} \frac{(30)(51) - \frac{1}{16} n_i^2 (31)^2}{V_0}$	-	-	0,736	0,736	6,597	6,597	9,074	9,074
4	$\frac{1}{4} \frac{(37)(51) - \frac{1}{8} n_i^2 (32)(31)}{V_0}$	-	-	+ 0,057	- 0,057	- 3,226	3,226	+ I,109	- I,109
5	$\frac{(2)}{(3)}$	-	-	+ 0,949	0,949	- 0,499	- 0,499	- 0,04515	- 0,04515
6	$\frac{(4)}{(3)}$	- I	I	0,0775	- 0,0775	- 0,489	0,489	0,1222	- 0,1222
7	$\frac{391 n_i}{2 V_0}$	- 270°	270°	- 134°44'	134°44'	- 70°39'	70°39'	- 253°15'	253°15'
8	$\cos \frac{391 n_i}{2 V_0}$	0	0	- 0,7038	- 0,7038	0,3314	0,3314	- 0,2882	- 0,2882
9	$\sin \frac{391 n_i}{2 V_0}$	I	- I	- 0,7104	0,7104	- 0,9435	0,9435	0,9576	- 0,9576
10	$\frac{4,71}{V_0} \frac{(5)(8) + (6)(9)}{V_0}$	- I	- I	- 3,2	- 3,2	- 0,318	- 0,318	0,178	0,178
II	$\sqrt{q_{25} - \sum (10)}$	2,98							
12	$\frac{V_0}{V} = (11) + 0,5$	3,48							

Примечание: номера в формулах, расположенных в столбце 2, указаны по табл. 1.

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ РИККАТИ

С помощью искусственного разобщения членов некоторого вспомогательного дифференциального уравнения на два уравнения, каждое из которых может быть известными способами проинтегрировано в квадратурах, построено путём тождественного сопоставления полученных решений этих двух уравнений исходное дифференциальное уравнение.

Определённые условия, наложенные на коэффициенты этого уравнения, сводят последнее, например, к уравнению Риккати.

Вспомогательное уравнение, при этом, сводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Известно [1], что решение уравнения Риккати относится к проблеме особой важности, т.к. к нему сводится много других дифференциальных уравнений, имеющих широкое применение в технике.

Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$t'^2 = (dt + \beta)(\gamma + \delta), \quad (1)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ - пока произвольные имеющие непрерывную первую производную, функции аргумента x .

Представим (1) в виде

$$\frac{t'}{\alpha t + \beta} = F \text{ и } \frac{t'}{\gamma t + \delta} = \frac{1}{F}.$$

Тогда

$$t' - \alpha F t - F \beta = 0 \text{ и } t' - \frac{\gamma}{F} t - \frac{\delta}{F} = 0.$$

Интегралами этих уравнений будут выражения:

$$t = -e^{\int \alpha F dx} \int F \beta e^{-\int \alpha F dx} dx \text{ и } t = -e^{\int \frac{\gamma}{F} dx} \int \frac{\delta}{F} e^{-\int \frac{\gamma}{F} dx} dx.$$

Постоянные интегрирования приняты равными нулю. Приравнявая оба значения t , получаем

$$e^{\int \alpha F dx} \int F \beta e^{-\int \alpha F dx} dx = e^{\int \frac{\gamma}{F} dx} \int \frac{\delta}{F} e^{-\int \frac{\gamma}{F} dx} dx. \quad (2)$$

Логарифмируя и дифференцируя затем (2) после простых преобразований имеем

$$\alpha F - \frac{\gamma}{F} = \frac{F \beta e^{-\int \alpha F dx}}{\int F \beta e^{-\int \alpha F dx} dx} \left(\frac{\int F \beta e^{-\int \alpha F dx} dx}{\int \frac{\delta}{F} e^{-\int \frac{\gamma}{F} dx} dx} * \frac{\frac{\delta}{F} e^{-\int \frac{\gamma}{F} dx}}{F \beta e^{-\int \alpha F dx}} - 1 \right). \quad (3)$$

Из (2) следует

$$\frac{\int F \beta e^{-\int \alpha F dx} dx}{\int \frac{\delta}{F} e^{-\int \frac{\gamma}{F} dx} dx} = \frac{e^{\int \frac{\gamma}{F} dx}}{e^{\int \alpha F dx}}.$$

Подставив это выражение в (3), получим

$$\int F \beta e^{-\int \alpha F dx} dx = \frac{\delta - \beta F^2}{\alpha F^2 - \gamma} e^{-\int \alpha F dx}.$$

Дифференцируя это равенство, приходим к выражению

$$FF' + F^4 \left[\frac{\alpha' \beta - \alpha \beta'}{2(\beta \gamma - \alpha \delta)} \right] + F^3 \left[\frac{\alpha \gamma \beta - \alpha^2 \delta}{2(\beta \gamma - \alpha \delta)} \right] + F^2 \left[\frac{\gamma \beta' - \alpha \delta' + \gamma' \beta - \alpha' \delta}{2(\beta \gamma - \alpha \delta)} \right] + F \left[\frac{\alpha \gamma \delta - \gamma^2 \beta}{2(\beta \gamma - \alpha \delta)} \right] + \frac{\gamma' \delta - \delta' \gamma}{2(\beta \gamma - \alpha \delta)} = 0.$$

Примем

$$\alpha = \beta = \varepsilon \quad (4)$$

и произведём подстановку

$$\frac{1}{F} = z.$$

Тогда

$$z' - z^3 \left[\frac{\gamma' \delta - \delta' \gamma}{2\varepsilon(\gamma - \delta)} \right] + \frac{\gamma}{2} z^2 - \left[\frac{\varepsilon'}{2\varepsilon} + \frac{\delta' - \gamma'}{2(\gamma - \delta)} \right] z - \frac{\varepsilon}{2} = 0.$$

Далее примем

$$\gamma = a\delta, \quad (5)$$

где a - некоторая постоянная не равная 0 и 1, и произведём подстановку

$$z = \frac{2U}{a\delta}. \quad (6)$$

Тогда

$$U' + U^2 - \left(\frac{\varepsilon'}{2\varepsilon} + \frac{\delta'}{2\delta} \right) U - \frac{a\delta\varepsilon}{4} = 0. \quad (7)$$

Произведём подстановку

$$U = y + \mu,$$

где μ - некоторая пока произвольная функция от x , тогда

$$U' = y' + \mu',$$

$$y' + \mu' + y^2 + 2y\mu + \mu^2 - \left(\frac{\varepsilon'}{2\varepsilon} + \frac{\delta'}{2\delta} \right) y - \left(\frac{\varepsilon'}{2\varepsilon} + \frac{\delta'}{2\delta} \right) \mu - \frac{a\varepsilon\delta}{4} = 0. \quad (8)$$

Наложим на μ условие

$$2y\mu - \left(\frac{\varepsilon'}{2\varepsilon} + \frac{\delta'}{2\delta} \right) y = 0, \text{ при } y \neq 0;$$

$$2\mu - \left(\frac{\varepsilon'}{2\varepsilon} + \frac{\delta'}{2\delta} \right) = 0;$$

$$\mu = \frac{1}{4} (\ln \varepsilon \delta)'.$$

Уравнение (8) принимает вид

$$y' + y^2 + \left[\mu' + \mu^2 - \left(\frac{\varepsilon'}{2\varepsilon} + \frac{\delta'}{2\delta} \right) \mu - \frac{a\varepsilon\delta}{4} \right] = 0.$$

$$\begin{cases} \text{Если } \varepsilon = \frac{1}{\delta}, \text{ тогда } \mu = 0 \\ y' + y^2 - \frac{\alpha}{4} = 0 \end{cases}$$

Или

$$y' + y^2 + \frac{1}{4} \left[(\ln \varepsilon \delta)'' - \frac{1}{4} (\ln \varepsilon \delta)'^2 - a\varepsilon\delta \right] = 0. \quad (9)$$

Рассмотрим далее уравнение Риккати в общем виде

$$y' + y^2 + Q_x = 0, \quad (10)$$

где Q_x заданная функция от x . Сравнивая (9) и (10), полагаем

$$(\ln \varepsilon \delta)'' - \frac{1}{4} (\ln \varepsilon \delta)'^2 - a\varepsilon\delta = 4Q_x.$$

Обозначим $\varepsilon\delta = \nu$, тогда

$$\left(\frac{\nu'}{\nu} \right)' - \frac{1}{4} \left(\frac{\nu'}{\nu} \right)^2 - a\nu = 4Q_x. \quad (11)$$

Выполним подстановку

$$\frac{\nu'}{\nu} = pz_* + q \quad \nu = e^{\int (pz_* + q) dx},$$

где p и q - пока произвольные функции x

Уравнение (11) принимает вид

$$p'z_* + pz_*' + q' - \frac{1}{4} p^2 z_*^2 - \frac{1}{2} pqz_* - \frac{1}{4} q^2 - ae^{\int (pz_* + q) dx} = 4Q_x. \quad (12)$$

Наложим условия

$$\left. \begin{aligned} q' - \frac{1}{4} q^2 &= 0 \\ -ae^{\int (pz_* + q) dx} &= 4Q_x \end{aligned} \right\}, \quad (13)$$

из которых получаем

$$q = -\frac{4}{x}; \quad p = \frac{\frac{Q'_x}{Q_x} - q}{z_*}. \quad (14)$$

Тогда

$$p' = \frac{\left(\frac{Q'_x}{Q_x} - q \right)' z_* - \left(\frac{Q'_x}{Q_x} - q \right) z_*'}{z_*^2}. \quad (15)$$

При выполнении условий (13), уравнение (12) принимает вид

$$p'z_* - \frac{1}{4}p^2z_*^2 + \left(z'_* - \frac{1}{2}qz_*\right)p = 0.$$

Подставляя в него (14) и (15), получаем

$$\frac{\left(\frac{Q'_x}{Q_x} + \frac{4}{x}\right)' z_* - \left(\frac{Q'_x}{Q_x} + \frac{4}{x}\right) z'_*}{z_*} - \frac{1}{4} \left(\frac{Q'_x}{Q_x} + \frac{4}{x}\right)^2 + \left(z'_* + \frac{2}{x} z_*\right) \frac{\left(\frac{Q'_x}{Q_x} + \frac{4}{x}\right)}{z_*} = 0$$

или

$$\left(\frac{Q'_x}{Q_x} + \frac{4}{x}\right)' - \frac{1}{4} \left(\frac{Q'_x}{Q_x} + \frac{4}{x}\right)^2 + \frac{2}{x} \left(\frac{Q'_x}{Q_x} + \frac{4}{x}\right) = 0.$$

Таким образом, решение уравнения Риккати (8) сведено к решению уравнения (1) с учётом условий (4) и (5). Интегралом уравнения (1), в котором, благодаря этим условиям, переменные разделяются, будет, например для $a > 0$, выражение

$$t = \frac{-s^2 a \pm \sqrt{s^4 a^2 - 4a^2 \left(s^2 a^2 + s^2 - \frac{s^4}{2} + \frac{a^2}{2} + a + \frac{1}{\varepsilon}\right)}}{2a^2}, \quad (16)$$

где

$$s = Ce^{\pm \int \sqrt{\varepsilon \delta} dx} = Ce^{\pm \sqrt{Q_x} dx},$$

а C - произвольно.

Проведя последовательно все подстановки в обратном порядке, получим интеграл уравнения Риккати (8)

$$y = \frac{at'}{2(at+1)} = \frac{a\varepsilon\delta(t+1)}{2t'} = -\frac{2Q_x(t+1)}{t'}.$$

Получение общего интеграла уравнения (8) в дальнейшем уже не представляет трудностей (2).

Содержание

Об одном методе разделения переменных при интегрировании линейных дифференциальных уравнений в частных производных	3
О получении новых решений линейных дифференциальных уравнений в частных производных	18
Обобщенный метод разделения переменных в приложении к одномерной краевой задаче для волнового уравнения	38
О физической сущности самопроизвольного пространственно-временного изменения частоты электромагнитного излучения	50
К динамике реальных волновых процессов	54
Об общем решении уравнений статической теории упругости	64
Температурные напряжения в толстых сегментных пластинах, вызываемые двухмерным стационарным температурным полем	69
Термоупругие напряжения в толстостенном цилиндре, вызываемые трехмерным стационарным температурным полем	86
Об одном методе решения задачи по движению твердого тела в вязкой несжимаемой жидкости	107
Эффект пространственно-временного изменения частоты колебаний электромагнитного излучения	111
О решении уравнений Риккати	137

Лауфер Марк Яковлевич
Избранные задачи математической физики
Сборник статей

Компьютерный набор и верстка – Потехин В.А.
Подготовка к печати – Усынин В.Ф., Потехин В.А.

Сдано в производство – сентябрь 2005 г.
Подписано в печать – апрель 2006 г.
Уч.-изд. л. 8,4. Усл. печ. л. 4,7. Тираж 50
Изд. № 899. Заказ № 875
Редакционный издательский отдел Севмашвтуза,
164500, г. Северодвинск, ул. Воронина, 6

Типография ФГУП. “ПО “Северное машиностроительное предприятие”
164500, г. Северодвинск, Архангельское шоссе, 58. Заказ № 15109